

**Opgelet:** er is een apart multiple-choice gedeelte op de laatste pagina. Schrijf op dat blad je naam en lever het mee in met je overige tentamenkopij!

## 1. Argumentvorm en strategie

Gegeven is de volgende argumentvorm.

$$\forall x (Gx \rightarrow Wx),$$

$$\forall x (\neg Gx \rightarrow Ox),$$

$$\therefore \forall x (Wx \vee Ox).$$

(a) Algemene kennis.

(i) Een argumentvorm bestaat uit een (eindige) lijst van zinsvormen (de premissen), gevolgd door nog een zinsvorm (het doel of de conclusie). Wat bedoelt men in de predicaatenlogica met: een geldige argumentvorm?

(ii) Een strategie bestaat uit een "begin"argument (een argumentvorm), gevolgd door een of meer "werk"argumenten (argumentvormen). Wat bedoelt men in de predicaatenlogica met: een geldige strategie?

(b) Geef een interpretatie van de gegeven argumentvorm aan de hand van de volgende sleutel.

$$Gx := "x \text{ heeft voldoende geld"},$$

$$Wx := "x \text{ rijdt met zijn eigen wagen"},$$

$$Ox := "x \text{ gaat met het openbaar vervoer"}.$$

(c) Ontwerp een bruikbare strategie om de geldigheid van de argumentvorm uit (b) te controleren, en controleer vervolgens je werkargument(en) met een aaneenschakeling van geldige argumenten.

(d) In de oorspronkelijke argumentvorm uit deel (b) veranderen we het doel  $\forall x (Wx \vee Ox)$  in:  $\exists x (\neg Wx \vee \neg Ox)$ . Geef een interpretatie in een universum waaruit blijkt dat het nieuwe voorstel géén geldige argumentvorm is.

## 2. Orderelaties

Gegeven is de verzameling  $DrieBits := \{0, 1\}^3$  en de deelverzameling  $A$  van alle 3-bit woorden met tenminste één 1. De verzameling  $Bits := \{0, 1\}$  heeft de gebruikelijke ordening met  $0 < 1$ . De verzameling  $DrieBits$  krijgt de Cartesische orde:

$$\langle b_1, b_2, b_3 \rangle \leq \langle c_1, c_2, c_3 \rangle \quad \text{betekent} \quad b_1 \leq c_1 \wedge b_2 \leq c_2 \wedge b_3 \leq c_3.$$

(a) Ontwerp een Hasse diagram voor de verzameling  $A$ . Je mag de bijgevoegde figuur gebruiken, waar alle punten zó geplaatst zijn dat het resultaat overzichtelijk blijft. Toelichting hoeft niet.

111  
○

**N.B.:** Deze figuur is ook opgenomen achterop het multiple choice formulier.

011 ○      ○ 101      ○ 110

001 ○      ○ 010      ○ 100

- (b) Welke zijn de maximale elementen en welke zijn de grootste elementen van  $A$ ? Welke zijn de minimale elementen en welke zijn de kleinste elementen van  $A$ ?
- (c) In de lexicografische ordening heeft de deelverzameling  $A$  een kleinste element. Welk?

### 3. Equivalentierelaties en Functies

Laat  $W_3$  de verzameling zijn van alle drie-letter woorden met letters uit het alfabet  $A := \{ 'a', 'b', \dots, 'z' \}$ . We vatten voor deze gelegenheid de letter 'y' op als de zesde klinker. Dus, de zes klinkers zijn

$\{ 'a', 'e', 'i', 'o', 'u', 'y' \}$

en de twintig medeklinkers zijn

$\{ 'b', 'c', 'd', 'f', 'g', 'h', 'j', 'k', 'l', 'm', 'n', 'p', 'q', 'r', 's', 't', 'v', 'w', 'x', 'z' \}$ .

Verder hebben we twee functies als volgt gedefiniëerd.

- $f: W_3 \rightarrow W_3$  kent aan een woord  $w \in W_3$  het drie-letter woord toe dat ontstaat als je elke medeklinker in  $w$  vervangt door een 'x'. Bijvoorbeeld:  $f("kap") = "xax"$ .
- $g: W_3 \rightarrow W_3$  kent aan een woord  $w \in W_3$  het drie-letter woord toe dat ontstaat als je elke klinker in  $w$  vervangt door een 'y'. Bijvoorbeeld:  $g("eik") = "yyk"$ .

(a) Algemene kennis.

(i) Wat bedoelt men met: een equivalentierelatie  $R$  in een verzameling  $V$ ?

(ii) Gegeven een equivalentierelatie  $R$  in een verzameling  $V$ , wat bedoelt men met: de  $R$ -equivalentieklasse van een element  $p \in V$ ?

(b) Laat zien dat  $f$  en  $g$  totale (getypeerde) functies zijn.

(c) Volgens de theorie ontstaat een equivalentierelatie (voor deze gelegenheid  $R_f$  genoemd) via het relatievoorschrift

$$w_1 R_f w_2 \text{ betekent } f(w_1) = f(w_2).$$

Hoeveel elementen zijn er in de equivalentieklasse  $["wat"]$  en hoeveel in de equivalentieklasse  $["yep"]$ ? Goede toelichting scoort.

(d) Nog steeds volgens de theorie ontstaat ook een equivalentierelatie (voor deze gelegenheid  $R_g$  genoemd) via het relatievoorschrift

$$w_1 R_g w_2 \text{ betekent } g(w_1) = g(w_2).$$

Hoeveel elementen zijn er ditmaal in de equivalentieklasse  $["wat"]$  en hoeveel in de equivalentieklasse  $["yep"]$ ? Goede toelichting scoort.

(e) Volgens het recept van de onderdelen (c) en (d) kunnen we tenslotte een equivalentierelatie  $R_{g \circ f}$  bouwen met het relatievoorschrift

$w_1 R_{g \circ f} w_2$  betekent  $(g \circ f)(w_1) = (g \circ f)(w_2)$ .

Hoeveel equivalentieklassen heeft  $R_{g \circ f}$ ? Geef een volledig representantensysteem waaruit dit aantal blijkt. Goede toelichting scoort.

**Aanwijzing** bij (e): zoek eerst een handig functievoorschrift voor  $g \circ f$ .

## 4. Inductie en recursie

(a) Algemene kennis.

- (i) Formuleer de strategie bij het gewone inductie principe. Je mag het antwoord geven in de vorm van een strategietabel of met woorden.
- (ii) Gegeven een (binaire) relatie  $R$  in een verzameling  $V$ , wat bedoelt men met: de transitieve afsluiting van  $R$ ? Je mag een formule geven of een verbale omschrijving.

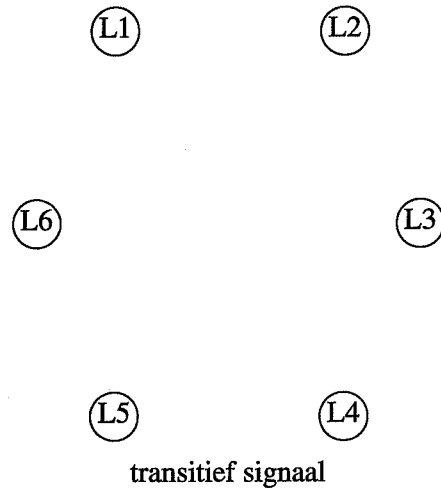
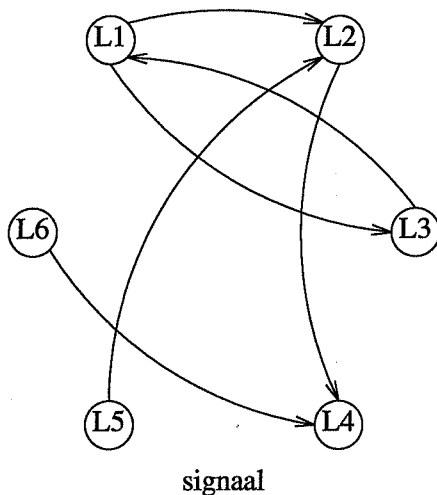
(b) Een rij natuurlijke getallen  $k_n$  voor  $n \geq 0$  wordt als volgt recursief gedefinieerd.

$$k_0 := 1, k_{n+1} := 3 \cdot k_n + 2 \cdot 3^{n+1}.$$

- (i) Bereken de termen  $k_1, k_2, k_3$ .
- (ii) Toon aan met (gewone) inductie naar  $n \geq 0$  dat  $k_n = (2n+1) \cdot 3^n$ .

(c) In een netwerk met locaties  $\{L_1, \dots, L_6\}$  is er een "signaal" relatie  $S$ , waar  $x S y$  betekent dat een signaal kan worden verstuurd van locatie  $x$  rechtstreeks naar locatie  $y$ . De relatie  $S$  is concreet gegeven in de volgende gerichte graaf. Laat  $Strans$  de transitieve afsluiting zijn van  $S$ . Vul in het rechterplaatje de gerichte graaf in, die correspondeert met  $Strans$ .

**N.B.:** Deze figuur is ook opgenomen achterop het multiple choice formulier.



## Normering:

|           |   |           |   |           |   |           |   |           |    |
|-----------|---|-----------|---|-----------|---|-----------|---|-----------|----|
| <b>1a</b> | 4 | <b>2a</b> | 6 | <b>3a</b> | 4 | <b>4a</b> | 4 | <b>MC</b> | 20 |
| <b>1b</b> | 3 | <b>2b</b> | 6 | <b>3b</b> | 3 | <b>4b</b> | 6 |           |    |
| <b>1c</b> | 7 | <b>2c</b> | 5 | <b>3c</b> | 4 | <b>4c</b> | 7 |           |    |
| <b>1d</b> | 3 |           |   | <b>3d</b> | 4 |           |   |           |    |
|           |   |           |   | <b>3e</b> | 4 |           |   |           |    |
| <hr/>     |   | <hr/>     |   | <hr/>     |   | <hr/>     |   | <hr/>     |    |
| 17        |   | 17        |   | 19        |   | 17        |   | 20        |    |

Voor het multiple choice gedeelte geldt: -4 ptn per fout.

$$\text{Totaal} = 90; \quad \text{Cijfer} = \frac{\text{Behaald Totaal}}{10} + 1.$$

- ☞ Dit cijfer kan nog worden verhoogd met ½ bonuspunt voor goed huiswerk.
- ☞ Voor dit tentamen heb je twee uur de tijd.

Na afloop van dit tentamen vind je een volledig uitgewerkte versie van het tentamen op blackboard (Knop "Course information", folder #16 bij week 51). De attachment bestaat in postscript en in pdf.

### Enkele standaard argumentvormen

| naam                           | argumentvorm                                                       | evt. variant                         | alternatieve naam                  |
|--------------------------------|--------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|
| <b>Modus Ponens</b>            | $p \rightarrow q, p$<br>$\therefore q$                             |                                      | ' $\rightarrow$ ' eliminatie regel |
| <b>Modus Tollens</b>           | $p \rightarrow q, \neg q$<br>$\therefore \neg p$                   |                                      |                                    |
| <b>Disjunctieve toevoeging</b> | $p$<br>$\therefore p \vee q$                                       | $q$<br>$\therefore p \vee q$         | ' $\vee$ ' introductie regel       |
| <b>Conjunctieve toevoeging</b> | $p, q$<br>$\therefore p \wedge q$                                  |                                      | ' $\wedge$ ' introductie regel     |
| <b>Disjunctief syllogisme</b>  | $p \vee q, \neg q$<br>$\therefore p$                               | $p \vee q, \neg p$<br>$\therefore q$ |                                    |
| <b>Dilemma regel</b>           | $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r$<br>$\therefore r$     |                                      | ' $\vee$ ' eliminatie regel        |
| <b>Contradictieregel</b>       | $p \rightarrow \perp$<br>$\therefore \neg p$                       |                                      | ' $\neg$ ' introductie regel       |
| <b>Ketenregel</b>              | $p \rightarrow q, q \rightarrow r$<br>$\therefore p \rightarrow r$ |                                      | hypothetisch syllogisme            |
| <b>Contrapositieregel</b>      | $p \rightarrow q$<br>$\therefore \neg q \rightarrow \neg p$        |                                      |                                    |
| <b>Al introductie</b>          | $Z(y)$<br>$\therefore \forall x Z(x)$                              |                                      |                                    |
| <b>Er introductie</b>          | $Z(y)$<br>$\therefore \exists x Z(x)$                              |                                      |                                    |
| <b>Al eliminatie</b>           | $\forall x Z(x)$<br>$\therefore Z(y)$                              |                                      |                                    |
| <b>Er eliminatie</b>           | $\exists x Z(x)$<br>$\therefore Z(y)$                              |                                      |                                    |

(Toelichtingen zijn weggelaten)

## Enkele standaard strategieën

| $\rightarrow$ introductie | Premissen:               | Doel:             |
|---------------------------|--------------------------|-------------------|
| Beginargument:            | [gegeven premissen]      | $P \rightarrow Q$ |
| Werkargument:             | [gegeven premissen], $P$ | $Q$               |

| Contrapositie  | Premissen:                    | Doel:             |
|----------------|-------------------------------|-------------------|
| Beginargument: | [gegeven premissen]           | $P \rightarrow Q$ |
| Werkargument:  | [gegeven premissen], $\neg Q$ | $\neg P$          |

| $\vee$ introductie | Premissen:                    | Doel:      |
|--------------------|-------------------------------|------------|
| Beginargument:     | [gegeven premissen]           | $P \vee Q$ |
| Werkargument:      | [gegeven premissen], $\neg P$ | $Q$        |

| Ongrijmde      | Premissen:               | Doel:    |
|----------------|--------------------------|----------|
| Beginargument: | [gegeven premissen]      | $\neg P$ |
| Werkargument:  | [gegeven premissen], $P$ | $\perp$  |

| $\vee$ eliminatie | Premissen:                      | Doel:          |
|-------------------|---------------------------------|----------------|
| Beginargument:    | [gegeven premissen], $P \vee Q$ | [gegeven doel] |
| Werkargument 1:   | [gegeven premissen], $P$        | [gegeven doel] |
| Werkargument 2:   | [gegeven premissen], $Q$        | [gegeven doel] |

| $\forall$ introductie | Premissen:          | Doel:            |
|-----------------------|---------------------|------------------|
| Beginargument:        | [gegeven premissen] | $\forall x P(x)$ |
| Werkargument:         | [gegeven premissen] | $P(y)$           |

| $\exists$ introductie | Premissen:          | Doel:            |
|-----------------------|---------------------|------------------|
| Beginargument:        | [gegeven premissen] | $\exists x P(x)$ |
| Werkargument:         | [gegeven premissen] | $P(t)$           |

| $\forall$ eliminatie | Premissen:                            | Doel:          |
|----------------------|---------------------------------------|----------------|
| Beginargument:       | [gegeven premissen], $\forall x P(x)$ | [gegeven doel] |
| Werkargument:        | [gegeven premissen], $P(t)$           | [gegeven doel] |

| $\exists$ eliminatie | Premissen:                            | Doel:          |
|----------------------|---------------------------------------|----------------|
| Beginargument:       | [gegeven premissen], $\exists x P(x)$ | [gegeven doel] |
| Werkargument:        | [gegeven premissen], $P(y)$           | [gegeven doel] |

(Toelichtingen zijn weggelaten)