



1. Verzamelingen en relaties.

- (a) Gegeven zijn vijf verschillende verzamelingen:

$$A = \{b, c, f\}; B = \{a, b, c, e, f\}; C = \{a, c, d\}; D = \{a, c, e\}; E = \{a, b, c, d, e, f\}.$$

Welke van deze verzamelingen is deelverzameling van welke andere verzameling?

- (b) Maak een Venn-diagram voor elk van de twee opgegeven formules. Geef duidelijk aan welk gebied beschreven wordt door de formules. Zijn de twee verzamelingen gelijk?

$$A \cap (B \cup C)', \quad (A \cap B) \cap (A \cap C)'$$

- (c) De volgende gelijkheid is correct:

$$(A \cap B)' \cap (A \cap C)' = A' \cup (B \cup C)'$$

Controleer de gelijkheid met behulp van de wetten van de verzamelingenalgebra. Geef stap voor stap aan welke wetten je gebruikt.

N.B.: Na de normering vind je twee bladzijden met mogelijk nuttige informatie voor deze opgave.

- (d) We beschikken over de verzamelingen

$$Dagnummers := \{01, 02, \dots, 31\} \text{ en}$$

$$Maandnummers := \{01, 02, \dots, 12\}.$$

De verzameling *Data* is de deelverzameling van

$$Dagnummers \times Maandnummers$$

die bestaat uit alle werkelijk voorkomende data in 2006. Bekijk nu de relatie

$$KorteTermijn := \{ \langle d_1, d_2 \rangle : d_1 \in Data, d_2 \in Data, d_1 \leq d_2, d_2 - d_1 \leq 15 \text{ dagen} \}.$$

Voorbeeld:

$$\langle 27-01, 05-02 \rangle \in KorteTermijn, \quad \langle 27-01, 16-02 \rangle \notin KorteTermijn.$$

Beantwoord nu de volgende vragen met ja of met nee; ingeval van "nee", geef een voorbeeld waaruit dit blijkt.

- (i) Is de relatie reflexief?
- (ii) Is de relatie symmetrisch?
- (iii) Is de relatie antisymmetrisch?
- (iv) Is de relatie transitief?

2. Propositielogica

- (a) Algemene kennis:

- (i) In een formule treden 5 *atomaire proposities* op. Hoeveel regels bevat de (body van de) volledige waarheidstabel?
- (ii) Wat bedoelt men precies met een *geldige argumentvorm*?
- (iii) Gegeven is een strategie met een beginargument en één werkargument. Beide zijn argumentvormen. Wat betekent het, dat een dergelijke strategie *geldig* is?

Voor de rest van deze opgave bekijken we de volgende argumentvorm:

$$p \rightarrow (q \wedge r)$$

$$\therefore (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$$

N.B.: Na de normering vind je twee bladzijden met mogelijk nuttige informatie voor deze opgave.

- (b) Controleer de argumentvorm op geldigheid door middel van een waarheidstabel.
- (c) Geef een (combinatie)strategie waarmee je de argumentvorm uit onderdeel (b) in onderdeel (d) kan controleren.
- (d) Geef nu bij elk werkargument uit (c) een geschakeld argument om dat werkargument te bewijzen.

3. Predicatenlogica

- (a) Algemene kennis:
 - (i) Wat bedoelt men in de predicatenlogica met een *vrije variabele*?
 - (ii) Bij vertalen en interpreteren is het gebruik van *beperkte kwantoren* " $\forall x \in A$ " en " $\exists x \in B$ " (A, B zijn verzamelingen) vaak handig. Deze kwantoren werden ingevoerd via twee logische equivalenties. Maak de definitie af:

$$\forall x \in A, Z(x) \equiv \forall x (\dots)$$

$$\exists x \in B, Z(x) \equiv \exists x (\dots)$$

- (iii) De predicatenlogica voegt aan de propositielogica nog enkele nieuwe *strategieën* toe. Beschrijf er één van. Geef ook een gebruikelijke naam ervan.
- (b) Vertaal de volgende zin met behulp van de aangegeven vertaalsleutels.

"Ieder persoon die elke redenering kan begrijpen, is een natuurtalent of heeft logica gevolgd."

Px := "x is een persoon" (waarheidsverzameling: *Personen*).

Rx := "x is een redenering" (waarheidsverzameling: *Redeneringen*).

Bxy := "x kan y begrijpen".

Nx := "x is een natuurtalent".

Lx := "x heeft logica gevolgd".

Suggestie: geef geen "alles-of-niets" antwoord, maar bouw je vertaling op met enkele tussenstappen.

- (c) In onderdelen (c) en (d) kijken we naar de zinsvorm

$$\forall x (Dx \rightarrow \exists y (Sy \wedge \neg Vyx)).$$

- (i) Werk de ontkenning van de zinsvorm zover mogelijk uit in een logisch equivalente zinsvorm. **N.B.:** Waar nodig mag je gebruiken dat $\neg(p \rightarrow q) \equiv (p \wedge \neg q)$.
- (ii) Zet de gevonden formule uit (i) nu om in goed Nederlands met behulp van de aangegeven sleutels.

Dx := "x is een docent".

Sx := "x is een student".

Vxy := "x haalt voldoende bij y".

N.B.: Na de normering vind je twee bladzijden met mogelijk nuttige informatie voor dit onderdeel.

- (d) Gegeven is de volgende evaluatie van het binaire predicaat V uit onderdeel (c). Het symbool '+' geeft een voldoende aan.

student/docent	d_1	d_2	d_3	d_4
anja	+	-	+	+
bart	+	+	+	+
carl	-	+	+	-
dirk	+	+	-	+

- (i) Is de *gegeven* uitspraak uit (c) (dus *niet* de ontkenning) onder deze interpretatie waar of onwaar?
- (ii) Geef de waarheidsverzameling bij de open zin

$$Sx \wedge \forall y(Dy \rightarrow Vxy).$$

Goede toelichting scoort in onderdeel (d).

4. Ordening

- (a) Algemene kennis:
 - (i) Aan welke voorwaarden moet een *partiële ordening* voldoen? De namen van deze voorwaarden volstaan.
 - (ii) Wat bedoelt men met een *Hasse diagram* van een partiël geordende verzameling?
- (b) Gegeven is een verzameling V met deelverzameling A , een partiële ordening $\leq$ in V , en een element p van V . Geef in symbolische vorm de definitie van volgende noties:
 - (i) p is het grootste element van A .
 - (ii) p is een maximaal element van A .
- (c) Neem nu voor V de verzameling $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ met de Cartesische ordening (uitgaande van de natuurlijke ordening op $\mathbb{Z}$), en voor A de deelverzameling
$$\{ \langle x, y \rangle : 1 \leq x, 1 \leq y, 3 \leq x + y \leq 5 \}.$$
Teken een Hasse diagram met de elementen van A .
- (d) (vervolg onderdeel (c)). Heeft A een grootste element? Zo ja, geef dit element; zo niet, geef alle maximale elementen van A .
- (e) (vervolg onderdelen (c) en (d)). Heeft A een kleinste element? Zo ja, geef dit element; zo niet, geef alle minimale elementen van A .

5. Functies

- (a) Algemene kennis:
 - (i) Wat onderscheidt een *functie* van een (binaire) relatie?
 - (ii) Wat bedoelt men met een *injectieve* (1-1) functie f ?
 - (iii) Wat bedoelt men met een *surjectieve* getypeerde functie $f: A \rightarrow B$?
- (b) In dit onderdeel gebruiken we de verzameling $A := \{ 'a', 'b', 'c', \dots, 'z' \}$ van alle kleine letters. Zij W_{2+} de verzameling van alle woorden met tenminste 2 letters uit A en zij W_2 de verzameling van alle woorden met precies 2 letters uit A . We hebben een functie $kap: W_{2+} \rightarrow W_2$, die een woord van lengte ≥ 2 afkapt na de tweede letter.

Voorbeeld: $kap("jantje") = "ja"$.

Verder hebben we een functie $volgnr: W_2 \rightarrow \{1, 2, \dots, 1000\}$, waarbij $volgnr(x)$ het volgnummer van x is in de lexicografisch gesorteerde lijst van elementen van W_2 tot een maximum van 1000.

Voorbeeld: $volgnr("af") = 6$, $volgnr("ba") = 27$.

- (i) Geef een (summiere) beschrijving van het proces bij de functie $volgnr \circ kap$.
- (ii) Laat zien dat de samengestelde functie $volgnr \circ kap$ totaal is.
- (iii) Is de functie $volgnr \circ kap$ surjectief? Licht je antwoord toe.
- (c) In dit onderdeel is $A := \{ 'a', 'b', 'c', 'd', 'e' \}$ en $V := A \times A$. Elke letter in A heeft een waarde, namelijk, $'a': 1, 'b': 2, 'c': 3, 'd': 4, 'e': 5$. Gegeven is de functie

$$waarde: V \rightarrow \{1, 2, \dots, 10\}$$

met het volgende functievoorschrift. Voor $x \in V$ is $waarde(x)$ de som van de letterwaarden van de letters in x .

Bijvoorbeeld, $waarde("ab") = 1+2=3$.

Zij R de equivalentierelatie met voorschrift

$xRy \Leftrightarrow waarde(x) = waarde(y)$.

- (i) Geef een beschrijving van het relatievoorschrift in woorden.
- (ii) Beschrijf de equivalentieklassen van "aa" en van "ac" door opsomming.
- (iii) Hoeveel verschillende equivalentieklassen heeft de relatie R ?

6. Inductie en Recursie

(a) Algemene kennis:

- (i) ~~Zij R een relatie in een eindige verzameling A . Wat bedoelt men met een weergave van de relatie R in matrixvorm?~~
 - (ii) Het (gewone) principe van inductie is een strategie bij het werken met gehele getallen. De premissen van het beginargument vormen een standaard lijst van wetten in $\mathbb{Z}$. Hoe ziet het doel van dit beginargument eruit, en hoe ziet(n) het (de) werkargument(en) eruit?
 - (iii) Wat bedoelt men met de *transitieve afsluiting* van een (binaire) relatie?
- (b) Een rij reële getallen $(t_n)_{n=2}^\infty$ is als volgt recursief gedefiniëerd.

$$t_2 := 4; \quad t_{n+1} := t_n + 2n + 2 \quad (n \geq 2).$$

- (i) Bereken de termen t/m t_5 van de rij $(t_n)_{n=2}^\infty$.
 - (ii) Bewijs met inductie dat $t_n = n^2 + n - 2$ voor alle $n \geq 2$.
- (c) Gegeven is een verzameling $A = \{1, 2, 3, 4\}$ (elementen in deze volgorde ingevoerd) en een binaire relatie R in A , beschreven in matrixvorm:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (i) Geef de relatie weer als een verzameling van paren $\langle x, y \rangle \in A \times A$.
 - (ii) Geef de relatie weer als een gerichte graaf
 - (iii) Geef de transitieve afsluiting van R weer in matrixvorm.
- Suggestie:** om met R te werken mag je eender welke manier van voorstellen gebruiken. Het resultaat moet wel in matrixvorm worden weergegeven.

Normering:

1a	3	2a	3	3a	3	4a	2	5a	3	6a	3	M	16
1b	3	2b	4	3b	3	4b	3	5b	4	6b	4		
1c	3	2c	3	3c	4	4c	3	5c	4	6c	4		
1d	3	2d	3	3d	3	4d	3						
						4e	3						
12		13		13		14		11		11		16	

Multiple-choice gedeelte: -3punten per fout

Totaal = 90

Cijfer = Behaald Totaal/10 + 1

Na afloop van dit tentamen vind je een volledig uitgewerkte versie van het tentamen op blackboard (Knop "Course information", folder #8). De attachment bestaat in postscript en in pdf.

Wetten van de verzamelingen algebra

Commutativiteit:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Associativiteit:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

Distributiviteit:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Identiteiten:

$$A \cup U = U \text{ en } A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap U = A \text{ en } A \cap \emptyset = \emptyset$$

Idempotentie:

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

Complement:

$$A \cup A' = U$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

DeMorgan's wetten:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Involutie:

$$(A')' = A$$

Vervangingsregel: ...

Wetten van de propositie algebra

Commutatieve wetten:

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

Associatieve wetten:

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$

Distributieve wetten:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Identiteitswetten:

$$p \vee \top \equiv \top \text{ en } p \vee \perp \equiv p$$

$$p \wedge \top \equiv p \text{ en } p \wedge \perp \equiv \perp$$

Idempotentie:

$$p \vee p \equiv p$$

$$p \wedge p \equiv p$$

Negatie:

$$p \vee \neg p \equiv \top$$

$$p \wedge \neg p \equiv \perp$$

DeMorgan's wetten:

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

Involutie:

$$\neg \neg p \equiv p$$

Vervangingsregel: ...

Aanvullende wetten van de predicaatlogica

$$\forall x \forall y Zxy \equiv \forall y \forall x Zxy$$

$$\exists x \exists y Zxy \equiv \exists y \exists x Zxy$$

(verwisseling van kwantoren)

$$\neg \forall x Zx \equiv \exists x \neg Zx$$

$$\neg \exists x Zx \equiv \forall x \neg Zx$$

(negatie van kwantoren)

$$\forall x (Px \wedge Qx) \equiv \forall x Px \wedge \forall x Qx$$

$$\exists x (Px \vee Qx) \equiv \exists x Px \vee \exists x Qx$$

(kwantoren en voegwoorden)

Enkele standaard argumentvormen

naam	argumentvorm	evt. variant	alternatieve naam
Modus Ponens	$p \rightarrow q, p$ $\therefore q$		' $\rightarrow$ ' eliminatie regel
Modus Tollens	$p \rightarrow q, \neg q$ $\therefore \neg p$		
Conjunctieve simplificatie	$p \wedge q$ $\therefore q$	$p \wedge q$ $\therefore p$	' $\wedge$ ' eliminatie regel
Disjunctief syllogisme	$p \vee q, \neg q$ $\therefore p$	$p \vee q, \neg p$ $\therefore q$	
Dilemma regel	$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r$ $\therefore r$		' $\vee$ ' eliminatie regel
Contradictieregel	$p \rightarrow \perp$ $\therefore \neg p$		' $\neg$ ' introductie regel
Ketenregel	$p \rightarrow q, q \rightarrow r$ $\therefore p \rightarrow r$		hypothetisch syllogisme
Contrapositiereg	$p \rightarrow q$ $\therefore \neg q \rightarrow \neg p$		

Enkele standaard strategieën

' $\rightarrow$ ' introductie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$p \rightarrow q$
Werkargument:	[gegeven premissen], p	q
Contrapositie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$p \rightarrow q$
Werkargument:	[gegeven premissen], $\neg q$	$\neg p$
' $\neg$ ' introductie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$\neg p$
Werkargument:	[gegeven premissen], p	$\perp$
' $\wedge$ ' introductie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$p \wedge q$
Werkargument 1:	[gegeven premissen]	p
Werkargument 2:	[gegeven premissen]	q
' $\vee$ ' eliminatie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen], $p \vee q$	[gegeven doel]
Werkargument 1:	[gegeven premissen], p	[gegeven doel]
Werkargument 2:	[gegeven premissen], q	[gegeven doel]

Leeg blad ten behoeve van apart multiple choice gedeelte