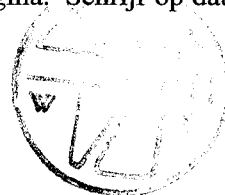


Opgelet: er is een apart multiple-choice gedeelte op de laatste pagina. Schrijf op dat blad je naam en lever het mee in met je overige tentamenkopij!



1. Strategie en bewijs

Zij R een symmetrische en transitieve relatie in een verzameling V . We willen met deze premissen aantonen dat

$$\forall x \in V (\exists y \in V xRy \rightarrow xRx).$$

Let op de haakjes.

- (a) Geef voor het bedoelde argument een (combinatie)strategie die begint met

	premissen	doel
Beginargument	(1) R symmetrisch in V , (2) R transitief in V	$\forall x \in V (\exists y \in V xRy \rightarrow xRx)$

- (b) Geef een schakeling van standaard argumenten om het (de) werkargument(en) van deze strategie te controleren.
(c) Geef een verbaal bewijs op basis van de aangegeven strategie en de aangegeven schakelingen.

2. Partiële ordening

In deze opgave werken we met de verzameling

$$Del42 := \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$$

(de verzameling van alle delers van 42), en met de relatie *Deelt* in $Del42$ met voorschrift " x is een deler van y ". Deze relatie is, zoals bekend, een partiële ordening (je hoeft dit niet aan te tonen).

- (a) Wat bedoelt men in het algemeen met het *Hasse diagram* van een partiële ordening " $\leq$ "?
(b) Geef de relatie *Deelt* in $Del42$ weer door middel van een Hasse diagram.
(c) Neem nu de deelverzameling $A := \{2, 3, 6, 7, 14, 21\}$ van $Del(42)$. Heeft A een kleinste element volgens de orderrelatie *Deelt*? Zo ja, geef dit element; zo niet, geef alle minimale elementen.
(d) Heeft de verzameling A een grootste element volgens de orderrelatie *Deelt*? Zo ja, geef dit element; zo niet, geef alle maximale elementen.

3. Equivalentierelaties

In wat volgt is W de verzameling $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ en V de verzameling $W \times W$. We beschikken over de volgende equivalentierelaties in W (je hoeft dit niet aan te tonen):

$$R_1 := \{ \langle x, y \rangle : x - y \text{ is een veelvoud van } 2 \},$$

$$R_2 := \{ \langle x, y \rangle : x - y \text{ is een veelvoud van } 3 \}.$$

- (a) Geef alle equivalentieklassen van R_1 en van R_2 .
(b) Geef een volledig representantensysteem voor R_1 en voor R_2 .
(c) In V construeren we een relatie R als volgt.

$$\langle x_1, x_2 \rangle R \langle y_1, y_2 \rangle \Leftrightarrow x_1 R_1 y_1 \wedge x_2 R_2 y_2.$$

Toon aan dat R een equivalentierelatie is in W .

Aanwijzing: Aan het antwoord zitten diverse onderdelen vast. Je kan scoren voor elk goed gemaakt onderdeel.

- (d) (Vervolg onderdeel (c)) Beschrijf de R -equivalentieklasse van $\langle 1,1 \rangle$ door opsomming. (Antwoord volstaat.)
- (e) (Vervolg onderdeel (c)) Geef een volledig representantensysteem voor de equivalentierelatie R . (Antwoord volstaat.)

4. Functies

- (a) Gegeven zijn de volgende twee functies f, g in tabelvorm:

x	1	2	3	4	5	x	1	2	3	4	5
$f(x)$	6	1	7	3	2	$g(x)$	2	5	1	3	2

- (i) Geef de tabellen voor de samengestelde functies $f \circ g$ en $g \circ f$.
- (ii) Wat is het definitiegebied van de functies $f \circ g$ en $g \circ f$?
- (iii) Welke van de functies f, g zijn 1-1? Welke hebben een inverse functie? Geef in voorkomend geval de tabel van de inverse functie.
- (b) Zij $V := \{0, 1, \dots, 9\}$ de verzameling van alle cijfers en zij $h: V \rightarrow V$ de functie gegeven door volgende tabel.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$h(x)$	1	2	4	2	4	6	8	6	8	1

De functie h is totaal en, zoals bekend, leidt een totale functie tot een equivalentierelatie (zeg: R) in het domein. Het voorschrift voor xRy is: $h(x) = h(y)$.

- (i) Wat bedoelt men met "de functie h is totaal"?
- (ii) Geef de R -equivalentieklasse $[0]$ van 0 en $[1]$ van 1 door opsomming.
- (iii) Hoeveel verschillende equivalentieklassen heeft R ? (Goede toelichting scoort.)

5. Inductie en recursie

We bekijken de rekenkundige rij met beginterm a en verschil d . De rij begint dus met $a, a+d, a+2d, \dots$. De som van de eerste n termen van deze rij noemen we S_n .

$$\begin{aligned} \text{Bijvoorbeeld: } S_1 &= a, \quad S_2 = a + (a+d) = 2a+d, \\ S_3 &= a + (a+d) + (a+2d) = 3a+3d. \end{aligned}$$

Zodoende:

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (a+(n-1)d) = \sum_{k=0}^{n-1} a + kd.$$

- (a) Neem als beginterm $a=1$ en als verschil $d=2$. Bereken S_4 en S_5 .
- (b) Toon aan met inductie naar $n \geq 1$ dat

$$S_n = n \cdot a + \frac{1}{2}n(n-1) \cdot d.$$

Normering:

1a	6	2a	3	3a	3	4a	7	5a	6	M	15
1b	6	2b	4	3b	4	4b	8	5b	9		
1c	3	2c	4	3c	4						
		2d	4	3d	2						
				3e	2						
15		15		15		15		15		15	

Multiple choice: -3 punten per fout.

Totaal = 90; Cijfer = Behaald Totaal / 10 + 1

- ☞ Na afloop van dit tentamen vind je een volledig uitgewerkte versie van het tentamen op blackboard (Knop "Course information", folder #16). De attachment bestaat in postscript en in pdf.

Enkele standaard argumentvormen

naam	argumentvorm	evt. variant	alternatieve naam
Modus Ponens	$p \rightarrow q, p$ $\therefore q$		' $\rightarrow$ ' eliminatie regel
Modus Tollens	$p \rightarrow q, \neg q$ $\therefore \neg p$		
Disjunctieve toevoeging	p $\therefore p \vee q$	q $\therefore p \vee q$	' $\vee$ ' introductie regel
Conjunctieve toevoeging	p, q $\therefore p \wedge q$		' $\wedge$ ' introductie regel
Disjunctief syllogisme	$p \vee q, \neg q$ $\therefore p$	$p \vee q, \neg p$ $\therefore q$	
Dilemma regel	$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r$ $\therefore r$		' $\vee$ ' eliminatie regel
Contradictieregel	$p \rightarrow \perp$ $\therefore \neg p$		' $\neg$ ' introductie regel
Ketenregel	$p \rightarrow q, q \rightarrow r$ $\therefore p \rightarrow r$		hypothetisch syllogisme
Contrapositieregel	$p \rightarrow q$ $\therefore \neg q \rightarrow \neg p$		
Al introductie	$Z(y)$ $\therefore \forall x Z(x)$	(toelichting weggelaten)	
Er introductie	$Z(y)$ $\therefore \exists x Z(x)$	(toelichting weggelaten)	
Al eliminatie	$\forall x Z(x)$ $\therefore Z(y)$	(toelichting weggelaten)	
Er eliminatie	$\exists x Z(x)$ $\therefore Z(y)$	(toelichting weggelaten)	

Enkele standaard strategieën uit de propositielogica

- Doel $p \rightarrow q$

' $\rightarrow$ ' introductie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$p \rightarrow q$
Werkargument:	[gegeven premissen], p	q

- Doel implicatie via contrapositie

Contrapositie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$p \rightarrow q$
Werkargument:	[gegeven premissen], $\neg q$	$\neg p$

- Doel $p \vee q$ via implicatie

' $\vee$ ' introductie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$p \vee q$
Werkargument:	[gegeven premissen], $\neg p$	q

- Doel $p \wedge q$

' $\wedge$ ' introductie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$p \wedge q$
Werkargument 1:	[gegeven premissen]	p
Werkargument 2:	[gegeven premissen]	q

- Doel $\neg p$ via bewijs uit het ongerijmde

' $\neg$ ' introductie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$\neg p$
Werkargument:	[gegeven premissen], p	$\perp$

- Premisse $p \vee q$

' $\vee$ ' eliminatie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen], $p \vee q$	[gegeven doel]
Werkargument 1:	[gegeven premissen], p	[gegeven doel]
Werkargument 2:	[gegeven premissen], q	[gegeven doel]

- Premisse $p \wedge q$

' $\wedge$ ' eliminatie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen], $p \wedge q$	[gegeven doel]
Werkargument:	[gegeven premissen], p, q	[gegeven doel]

Tabel 2: Samenvatting standaard strategieën in propositielogica

Enkele standaard strategieën voor kwantoren

• Doel "voor-alle" uitspraak

' $\forall$ ' introductie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$\forall x \in V, P(x)$
Werkargument:	[gegeven premissen], $y \in V$	$P(y)$

• Doel "er-is" uitspraak

' $\exists$ ' introductie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$\exists x \in V, P(x)$
Werkargument:	[gegeven premissen]	$t \in V \wedge P(t)$

• Premisse "voor-alle" uitspraak

' $\forall$ ' eliminatie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen], $\forall x \in V, P(x)$	[gegeven doel]
Werkargument:	[gegeven premissen], $t \in V \rightarrow P(t)$	[gegeven doel]

• Premisse "er-is" uitspraak

' $\exists$ ' eliminatie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen], $\exists x \in V, P(x)$	[gegeven doel]
Werkargument:	[gegeven premissen], $y \in V, P(y)$	[gegeven doel]

• Doel "er-is-één" uitspraak

' $\exists!$ ' introductie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$\exists! x \in V, Px$
Werkargument 1:	[gegeven premissen]	$\exists x \in V, Px$
Werkargument 2:	[gegeven premissen]	$\forall x \in V \forall y \in V (Px \wedge Py \rightarrow x = y)$

• Doel "voor-alle-implicatie"

	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$\forall x \in V (Px \rightarrow Qx)$
Werkargument:	[gegeven premissen], $y \in V, Py$	Qy

Tabel 3: Samenvatting strategieën voor kwantoren

(kommentaren verwijderd)