

Divisie Wiskunde en Informatika	Logische Taal en Redeneermethoden
Vrije Universiteit	Deeltentamen I: di 25-10-05

Opgelet: er is een apart multiple-choice gedeelte op de laatste pagina. Schrijf op dat blad je naam en lever het mee in met je overige tentamenkopij!

1. Verzamelingen

- (a) Venn-diagrammen. Maak een Venn-diagram voor elk van de twee opgegeven formules. Geef duidelijk aan welk gebied beschreven wordt door de formules. Zijn de twee verzamelingen gelijk?

$$(A \Delta B) \cap C, (A \cap C) \Delta (B \cap C)$$

- (b) Verzamelingenalgebra. Vereenvoudig zover mogelijk met behulp van verzamelingenalgebra. Geef daarbij aan welke wetten je gebruikt. Geef ook aan bij welke stappen de vervangingsregel wordt gebruikt. Het universum is U .

$$(A \cap B') \cup (A \cap B).$$

2. Relaties

- (a) Dat een relatie R in een verzameling V reflexief is, kun je uitdrukken in de taal van de predicaatenlogica op deze manier:

$$\forall x \in V, xRx.$$

Geef in dezelfde stijl een formulering van de volgende uitspraken:

- (i) R is symmetrisch.
(ii) R is transitief.

- (b) Bekijk de relaties

$$R := \{ \langle 'a', 1 \rangle, \langle 'b', 2 \rangle, \langle 'c', 3 \rangle, \langle 'd', 4 \rangle \},$$

$$S := \{ \langle 2, 'e' \rangle, \langle 3, 'i' \rangle, \langle 4, 'o' \rangle, \langle 5, 'u' \rangle \}.$$

Stel de relatie $S \circ R$ voor door middel van een Venn-diagram.

3. Logische equivalentie

- (a) Laat zien door middel van een waarheidstabel dat de formules

$$p \wedge (q \rightarrow r), (p \wedge q) \rightarrow (p \wedge r)$$

niet logisch equivalent zijn.

- (b) Laat zien door middel van propositiealgebra dat de formules

$$p \rightarrow (q \wedge r), (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$$

logisch equivalent zijn. Begin met de implicaties om te zetten in de benodigde voegwoorden " $\neg$ ", " $\vee$ ", " $\wedge$ ". Geef bij de daarop volgende stappen telkens aan welke wet je gebruikt.

N.B.: Als je de naam van de wet niet meer kent, mag je hem ook weergeven als formule.

4. Argumenten controleren in propositiologica

We bekijken het volgende argument.

Jan bereikt zijn doel. Om zijn doel te bereiken dient Jan sterk te wezen of slim te wezen. $\therefore$ Als Jan niet sterk is, is hij slim.

- (a) Geef een vertaalsleutel en geef daarmee de argumentvorm weer.
(b) Het argument is geldig. Controleer dit in twee stappen:
(1) Bepaal een geschikte strategie.
(2) Het (de) aldus ontstane werkargument(en) moet(en) geverifieerd worden met een

schakeling van standaard argumenten.

5. Predicatenlogica

- (a) Vertalen. Vertaal de volgende zin met de aangereikte vertaalsleutel. Onderstel een universum van personen. Zorg ervoor dat het antwoord geen overbodige haakjes bevat.

"Al wie vrienden heeft, is niet eenzaam"

$Vxy := "x \text{ heeft } y \text{ tot vriend}"$

$Ex := "x \text{ is eenzaam}"$

- (b) We hebben een universum van vier personen *ann*, *bart*, *carl*, en *dirk* en een tweepplaatsig predicaat Gxy met interpretatiesleutel

$Gxy := "persoon x \text{ vindt persoon } y \text{ geweldig}"$.

De gegevens zijn verwerkt in de volgende tabel.

$x \backslash y$	ann	bart	carl	dirk	$\forall y G(x,y)$	$\exists y G(x,y)$
ann	F	T	F	T		
bart	F	F	F	F		
carl	T	T	T	T		
dirk	F	F	T	T		
$\forall x G(x,y)$						
$\exists x G(x,y)$						

- (i) Interpreteer de volgende twee formules in een vlotte zin.
 $\exists x G(x, ann), \quad \exists y G(bart, y)$.
- (ii) Een van de zinnen in (i) is niet waar onder de gegeven interpretatie. Leg uit welke en waarom.
- (iii) Evalueer de lege plaatsen in de tabel met 'T' (true) of 'F' (false). (De tabel is overgenomen op de achterzijde van het Multiple-choice formulier.)

Normering:

1a	8	2a	7	3a	7	4a	7	5a	7	M	15
1b	7	2b	8	3b	8	4b	8	5b	8		
15		15		15		15		15		15	

Voor het multiple choice gedeelte (M-kolom) geldt: -4ptn per fout antwoord.

Totaal = 90

Cijfer = Behaald Totaal/10 + 1

Na afloop van dit tentamen vind je een volledig uitgewerkte versie van het tentamen op blackboard (Knop "Course information", folder #8). De attachment bestaat in postscript en in pdf.

Wetten van de verzamelingen algebra

Commutativiteit:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Associativiteit:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

Distributiviteit:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Identiteiten:

$$A \cup U = U \text{ en } A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap U = A \text{ en } A \cap \emptyset = \emptyset$$

Idempotentie:

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

Complement:

$$A \cup A' = U$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

DeMorgan's wetten:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Involutie:

$$(A')' = A$$

Vervangingsregel: ...

Tabel 1: Wetten van de verzamelingen-algebra

Wetten van de propositie algebra

Commutatieve wetten:

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

Associatieve wetten:

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$

Distributieve wetten:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Identiteitswetten:

$$p \vee \top \equiv \top \text{ en } p \vee \perp \equiv p$$

$$p \wedge \top \equiv p \text{ en } p \wedge \perp \equiv \perp$$

Idempotentie:

$$p \vee p \equiv p$$

$$p \wedge p \equiv p$$

Negatie:

$$p \vee \neg p \equiv \top$$

$$p \wedge \neg p \equiv \perp$$

DeMorgan's wetten:

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

Involutie:

$$\neg \neg p \equiv p$$

Vervangingsregel: ...

Tabel 7: Wetten van de propositie-algebra

Enkele standaard argumentvormen

naam	argumentvorm	evt. variant	alternatieve naam
Modus Ponens	$p \rightarrow q, p$ $\therefore q$		' $\rightarrow$ ' eliminatie regel
Modus Tollens	$p \rightarrow q, \neg q$ $\therefore \neg p$		
Disjunctief syllogisme	$p \vee q, \neg q$ $\therefore p$	$p \vee q, \neg p$ $\therefore q$	
Dilemma regel	$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r$ $\therefore r$		' $\vee$ ' eliminatie regel
Contradictieregel	$p \rightarrow \perp$ $\therefore \neg p$		' $\neg$ ' introductie regel
Ketenregel	$p \rightarrow q, q \rightarrow r$ $\therefore p \rightarrow r$		hypothetisch syllogisme
Contrapositiereg	$p \rightarrow q$ $\therefore \neg q \rightarrow \neg p$		

Enkele standaard strategieën

' $\rightarrow$ ' introductie

Beginargument:	[gegeven premissen]	$p \rightarrow q$
Werkargument:	[gegeven premissen], p	q

Contrapositie

Beginargument:	[gegeven premissen]	$p \rightarrow q$
Werkargument:	[gegeven premissen], $\neg q$	$\neg p$

' $\neg$ ' introductie

Beginargument:	[gegeven premissen]	$\neg p$
Werkargument:	[gegeven premissen], p	$\perp$

' $\vee$ ' eliminatie

Beginargument:	[gegeven premissen], $p \vee q$	[gegeven doel]
Werkargument 1:	[gegeven premissen], p	[gegeven doel]
Werkargument 2:	[gegeven premissen], q	[gegeven doel]

naam, studierichting & jaar:

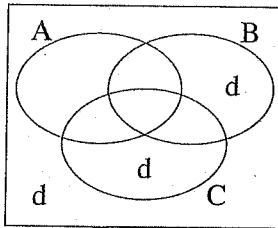
25-10-05

Multiple-choice gedeelte

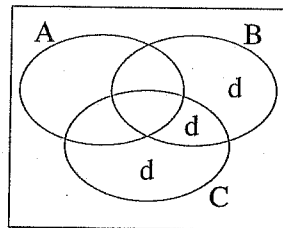
- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

M1. Gegeven is een element d en drie verzamelingen A, B, C in een universum, waarbij $d \in A' \cap (B \cup C)$.

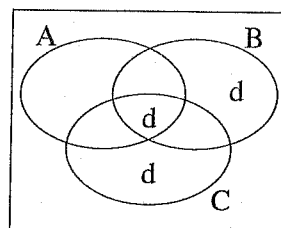
In een Venn-diagram met A, B, C plaatsen we een 'd' in elk vlakdeel waar het element d volgens de formule toe kan behoren. Welke van de volgende vier Venn-diagrammen geeft de situatie correct weer.



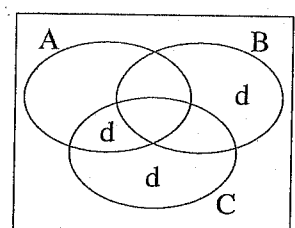
Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4

- ☐ Figuur 1.
- ☐ Figuur 2.
- ☐ Figuur 3.
- ☐ Figuur 4.

M2. De persoonsrelatie *IsGrootmoederVan* kan worden weergegeven als

- ☐ De samenstelling *IsVaderVan* $\circ$ *IsMoederVan*.
- ☐ De samenstelling *IsMoederVan* $\circ$ *IsVaderVan*.
- ☐ De vereniging van de samengestelde relaties *IsVaderVan* $\circ$ *IsMoederVan* en *IsMoederVan* $\circ$ *IsMoederVan*.
- ☐ De vereniging van de samengestelde relaties *IsMoederVan* $\circ$ *IsVaderVan* en *IsMoederVan* $\circ$ *IsMoederVan*.

M3. Welke van de volgende vier waarheidstabellen evalueert de formule $\neg p \vee \neg q$ juist:

p	q	$\neg p \vee \neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg p \vee \neg q$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1

Tabel 1

Tabel 2

Tabel 3

Tabel 4

- ☐ Tabel 1.
- ☐ Tabel 2.
- ☐ Tabel 3.
- ☐ Tabel 4.

M4. De argumentvorm van volgend argument is standaard:

Als je faalt voor LTR, dan faalt je ook voor Inleiding Logica. Je faalt niet voor Inleiding Logica. $\therefore$ Je faalt niet voor LTR.

Wat is de correcte naam van dit standaard argument?

- ☐ Dilemma regel.
- ☐ Disjunctief syllogisme.
- ☐ Contradictieregel.
- ☐ Modus tollens.

M5. Bij welke van de volgende zinnen past de logische vorm " $\exists x \forall y, P xy$ ":

- o Voor elke kwaal bestaat een remedie.
- o Sommige remedies helpen altijd.
- o Ieder student moet elk tentamen afleggen.
- o Voor sommige vakken geldt soms een uitzondering.

De volgende tabel hoort bij opgave 5(b) en mag voor het antwoord worden gebruikt:

$x \backslash y$	ann	bart	carl	dirk	$\forall y \, G(x,y)$	$\exists y \, G(x,y)$
ann	F	T	F	T		
bart	F	F	F	F		
carl	T	T	T	T		
dirk	F	F	T	T		
$\forall x \, G(x,y)$						
$\exists x \, G(x,y)$						