

1. Verzamelingen en Relaties

- (a) Venn-diagrammen en aantallen. Gegeven zijn drie verzamelingen A, B, C met (respectievelijk) 7, 8, 9 elementen in een universum U met 20 elementen. Verder is gegeven dat

$$\#(A \cap B \cap C) = 1,$$

$$\#(A \cap B) = \#(B \cap C) = \#(C \cap A) = 3.$$

Bepaal volgende aantallen met behulp van Venn-diagrammen:

$$\#(A \cup B \cup C), \quad \#(A' \cap B' \cap C'), \quad \#(U \setminus (A \cup B)).$$

In het resterend gedeelte van deze opgave gebruiken we de volgende verzameling.

$$\text{Weekdagen} := \{ma, di, wo, do, vr, za, zo\}.$$

Verder hebben we twee binaire relaties $R := \text{VolgendeWerkdag}$ en $S := \text{Eergisteren}$ in de verzameling Weekdagen , gegeven door opsomming:

$$R := \{ \langle ma, di \rangle, \langle di, wo \rangle, \langle wo, do \rangle, \langle do, vr \rangle, \langle vr, ma \rangle, \langle za, ma \rangle, \langle zo, ma \rangle \}.$$

$$S := \{ \langle ma, za \rangle, \langle di, zo \rangle, \langle wo, ma \rangle, \langle do, di \rangle, \langle vr, wo \rangle, \langle za, do \rangle, \langle zo, vr \rangle \}.$$

- (b) Stel de relaties R en S elk apart voor door middel van Venn-diagrammen. (Het multiple choice blad bevat de aanzet voor deze Venn diagrammen.)
- (c) De relatie R is *niet reflexief*, *niet symmetrisch*, en *niet transitief*. Geef voor elk van deze begrippen aan wat er schort.
- (d) Laat zien dat de relaties $R \circ S$ en $S \circ R$ niet dezelfde zijn.

2. Propositie- en Predicatenlogica

- (a) Vertalen en waarheidstabellen. We bekijken het volgende propositielogische argument.

Als het niet regent, gaan we op stap. Regent het en waait het, dan gaan we niet op stap.
Het regent maar het waait niet. $\therefore$ We gaan niet op stap.

Geef een *vertaalsleutel* en een *vertaling* volgens de sleutel. Ga tenslotte na met behulp van waarheidstabellen of dit argument *geldig* is.

- (b) Bewijs door de aangegeven argumentvormen aaneen te schakelen.

$$\exists x (Q_1x \vee Q_2x), \quad \forall x (Q_1x \rightarrow Px), \quad \forall x (Q_2x \rightarrow Px), \quad \therefore \exists x Px$$

(er-eliminatie regel, al-eliminatie regel, of-eliminatie regel, er-introductie regel).

- (c) We bekijken het volgende argument in een universum van dieren.

(1) Alle dieren die kunnen vliegen hebben vleugels.

(2) Alle dieren die geen poten hebben, hebben geen vleugels.

($\therefore$) $\therefore$ Als er dieren zijn die geen poten hebben, dan zijn er dieren die niet kunnen vliegen.

Geef, met *vertaalsleutel*, de *logische vorm* van dit argument. Je mag de onderlijnde woorden als sleutel gebruiken. Gebruik onbepaalde kwantoren,

- (d) (Vervolg onderdeel (c)) Geef een *strategie* om te verifiëren dat dit argument correct is.

- (e) (Vervolg onderdelen (c,d)) Geef nu een bewijs volgens je strategie uit (d). Je mag dit bewijs geven in woorden of in een tabelvormig schema.

3. Orderrelaties, Equivalentierelaties en Functies

- (a) Cartesische ordening. Zij $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ voorzien van de standaard ordening en neem de *Cartesische ordening* in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. We hebben een deelverzameling

$$A := \{ \langle x, y \rangle : x, y \in \mathbb{N}, 3 \leq x + y \leq 6 \}$$

van $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

- (i) Geef alle minimale elementen van A .
- (ii) Is er een kleinste element in A ?

Voor de rest van deze opgave werken we met de verzameling $V := \{0, 1, 2, \dots, 99\}$ en de functie $f: V \rightarrow \text{Cijfers}$ met voorschrift

$f(x)$ is de som van de cijfers van het getal x . Indien de som van de cijfers een getal ≥ 10 is, neem dan van dit getal opnieuw de som van de cijfers.

N.B. $\text{Cijfers} := \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$.

Voorbeeld: berekening van $f(94)$:

$$9 + 4 = 13, \quad 1 + 3 = 4, \quad \text{dus } f(94) = 4.$$

Zij R de equivalentierelatie in V die hoort bij f .

- (b) Controleer of de functie f al dan niet *injectief* / *surjectief* is.
- (c) Geef elk van de *equivalentieklassen* $[0]$, $[1]$, $[2]$ van R weer door opsomming.
- (d) Hoeveel *verschillende equivalentieklassen* heeft R ?
- (e) Geef een *volledig representantensysteem* voor R .

4. Inductie en recursie

- (a) Een rij reële getallen $(t_n)_{n=2}^\infty$ is als volgt recursief gedefiniëerd.

$$t_2 := 4; \quad t_{n+1} := t_n + 2n + 2 \quad (n \geq 2).$$

Bepaal de *eerste vijf termen* van de rij $(t_n)_{n=2}^\infty$.

- (b) (Vervolg onderdeel (a)). Bewijs *met inductie* dat $t_n = n^2 + n - 2$ voor alle $n \geq 2$.
- (c) Transitieve afsluiting. Gegeven is een verzameling A met 5 elementen en een binaire relatie R in A in matrixvorm:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Geef de *matrix* van de transitieve afsluiting van R . Suggestie: zet de gegevens eerst om in een gerichte graaf.

Normering:

1a	4	2a	4	3a	4	4a	3	MC	20
1b	4	2b	5	3b	4	4b	6		
1c	4	2c	3	3c	4	4c	7		
1d	5	2d	3	3d	3				
		2e	4	3e	3				
17		19		18		16		20	

Voor het multiple choice gedeelte geldt: -3ptn per fout antwoord.

Totaal op 90

Cijfer = Behaald Totaal / 10 + 1

Enkele standaard argumentvormen

naam	argumentvorm	evt. variant	alternatieve naam
Modus Ponens	$p \rightarrow q, p$ $\therefore q$		' $\rightarrow$ ' eliminatie regel
Modus Tollens	$p \rightarrow q, \neg q$ $\therefore \neg p$		
Disjunctief syllogisme	$p \vee q, \neg q$ $\therefore p$	$p \vee q, \neg p$ $\therefore q$	
Dilemma regel	$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r$ $\therefore r$		' $\vee$ ' eliminatie regel
Contradictieregel	$p \rightarrow \perp$ $\therefore \neg p$		' $\neg$ ' introductie regel
Ketenregel	$p \rightarrow q, q \rightarrow r$ $\therefore p \rightarrow r$		hypothetisch syllogisme
Contrapositieregel	$p \rightarrow q$ $\therefore \neg q \rightarrow \neg p$		
Al introductie	$Z(y)$ $\therefore \forall x Z(x)$	(toelichting weggelaten)	
Er introductie	$Z(y)$ $\therefore \exists x Z(x)$	(toelichting weggelaten)	
Al eliminatie	$\forall x Z(x)$ $\therefore Z(y)$	(toelichting weggelaten)	
Er eliminatie	$\exists x Z(x)$ $\therefore Z(y)$	(toelichting weggelaten)	

Enkele standaard strategieën

'$\rightarrow$' introductie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$p \rightarrow q$
Werkargument:	[gegeven premissen], p	q
Contrapositie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$p \rightarrow q$
Werkargument:	[gegeven premissen], $\neg q$	$\neg p$
'$\neg$' introductie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$\neg p$
Werkargument:	[gegeven premissen], p	$\perp$
'$\vee$' eliminatie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen], $p \vee q$	[gegeven doel]
Werkargument 1:	[gegeven premissen], p	[gegeven doel]
Werkargument 2:	[gegeven premissen], q	[gegeven doel]

naam, studierichting & jaar:

16-02-05

Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

M.1. Een partitie van een verzameling V is

- o een relatie in een collectie niet-lege deelverzamelingen van V .
- o een collectie niet-lege deelverzamelingen van V die onderling disjunct zijn.
- o een collectie niet-lege deelverzamelingen van V zo dat ieder element van V tot precies één van die delen behoort.
- o een collectie niet-lege deelverzamelingen van V waarvan de vereniging heel V is.

M.2. De relatie *IsGrootmoederVan* tussen personen is gelijk aan

- o de inverse relatie van *IsGrootvaderVan*.
- o de samenstelling *IsVaderVan* $\circ$ *IsMoederVan*.
- o de samenstelling *IsMoederVan* $\circ$ *IsVaderVan*.
- o de vereniging van de samengestelde relaties *IsVaderVan* $\circ$ *IsMoederVan* en *IsMoederVan* $\circ$ *IsMoederVan*.

M.3. Een contradictie in de propositielogica is een formule

- o die onwaar is terwijl de atomaire onderdelen waar zijn.
- o die altijd onwaar is ongeacht de waarheid van de atomaire onderdelen.
- o die de logische vorm van een slecht geformuleerde uitspraak weergeeft.
- o van de gedaante $p \rightarrow \neg p$.

M.4. De formule $\forall x(Px \vee Qx)$ is logisch equivalent met:

- o $\forall xPx \vee \forall xQx$.
- o $\forall xPx \wedge \forall xQx$.
- o $\forall x(\neg Px \rightarrow Qx)$.
- o -- (geen van deze).

M.5. Een maximaal element p van een verzameling A in een verzameling V met partiële ordening $\leq$ moet voldoen aan $p \in A$ en:

- o $\forall a \in A \neg p \leq a$.
- o $\forall a \in A (p \leq a \rightarrow p = a)$.
- o $\forall a \in A (a \leq p)$.
- o $\forall a \in A (a < p)$.

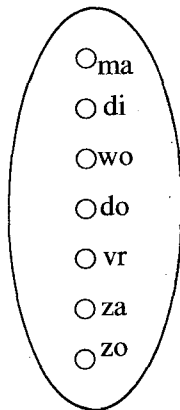
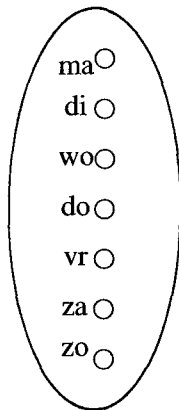
M.6. Zij R een equivalentierelatie in een verzameling V . Een volledig representantensysteem van R is

- o een deelverzameling van V met uit elke R -equivalentieklasse één element.
- o Een verzameling van representanten waarbij elke R -equivalentieklasse vertegenwoordigd is.
- o een partitie van V horend bij de equivalentieklassen van R .
- o een opdeling van V in twee deelverzamelingen: een klasse die bestaat uit elementen in relatie met p en een klasse die bestaat uit met elementen niet in relatie met p .

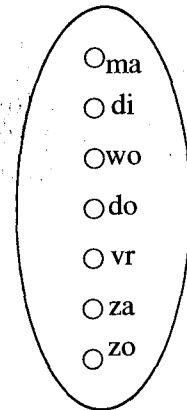
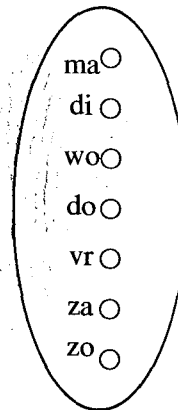
M.7. Het recursieve voorschrift voor $n!$ (n -faculteit, $n \geq 1$) is $1! := 1$ (basis) en verder:

- o $n! := (n+1)! \cdot n$.
- o $(n+1)! := n! \cdot n$.
- o $(n+1)! := n! \cdot (n+1)$.
- o $(n+1)! := n! + (n+1)$.

Venn-diagrammen ten behoeve van opgave 1(bcd).



de relatie R



de relatie S

