

☞ Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet! ☞

1. Argumentvorm en strategie. Gegeven is het volgende argument.

Alle onderzoekers lossen problemen op.

Als iemand problemen oplost of nieuwe vragen stelt, gaat de wetenschap vooruit.

∴ Als er onderzoekers zijn, dan gaat de wetenschap vooruit.

- (a) Geef, met vertaalsleutel, de argumentvorm van dit argument.

sleutel:

Ox := x is een onderzoeker

Px := x lost problemen op

Nx := x stelt nieuwe vragen

W := de wetenschap gaat vooruit

vertaling:

$\forall x (Ox \rightarrow Px),$

$\exists x (Px \vee Nx) \rightarrow W,$

∴ $\exists x Ox \rightarrow W.$

Merk op: de zin W bevat geen vrije variabele.

- (b) Geef een bruikbare strategie om de geldigheid van het argument uit (a) te controleren.

We nummeren de premissen:

(1): $\forall x (Ox \rightarrow Px),$ (2): $\exists x (Px \vee Nx) \rightarrow W.$

Strategie van $\rightarrow$ introductie:

	premissen	doel
Beginargument	(1), (2)	$\exists x Ox \rightarrow W$
Werkargument	(1), (2), (3): $\exists x Ox$	W

- (c) De strategie uit (b) heeft het gegeven argument omgezet in een of meer werkargumenten. Controleer deze door het schakelen van standaardargumenten.

Controle van het werkargument:

premissen(n)	volgnr+tussenconclusie	gebruikt argument
(3)	(4): Oy	$\exists$ eliminatie, $\exists x \Rightarrow y$
(1)	(5): $Oy \rightarrow Py$	$\forall$ eliminatie, $\forall x \Rightarrow y$
(4, 5)	(6): Py	Modus Ponens
(6)	(7): $Py \vee Ny$	$\vee$ introductie
(7)	(8): $\exists x (Px \vee Nx)$	$\exists$ introductie, $y \Rightarrow \exists x$
(2), (8)	∴ W	Modus Ponens

- (d) (Dit onderdeel staat los van de voorgaande onderdelen.) Laat zien door het geven van een interpretatie (in een "klein" universum) dat de volgende argumentvorm niet geldig is.

$\exists x (Qx \rightarrow R),$

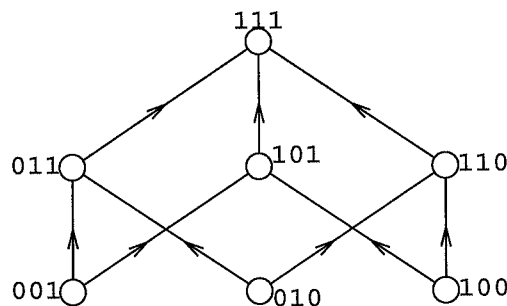
∴ $\exists x Qx \rightarrow R.$

(je mag er van uitgaan dat formule R geen vrije variabele x bevat).

Neem als universum: $\text{Bits} := \{0,1\}$. De uitspraak (zonder variabele!) R nemen we onwaar (bv. " $1=0$ "). Wat Q betreft nemen we $Q(0)$ waar en $Q(1)$ onwaar (bv. $Qx := "x=0"$). De premisse $\exists x(Qx \rightarrow R)$ is nu waar (neem 1 voor x , en denk om het beloftemodel voor $\rightarrow$), maar de conclusie $\exists x Qx \rightarrow Q$ faalt ($\exists x Qx$ waar, R onwaar).

2. Orderelaties. Gegeven is de verzameling Bits^3 , waar $\text{Bits} := \{0,1\}$ en de deelverzameling $A \subseteq \text{Bits}^3$ van alle 3-bit woorden met tenminste één 1. De verzameling Bits^3 wordt toegerust met de Cartesische orde.

- (a) Teken het Hasse diagram van de verzameling A . Het plaatje volstaat, maar goede toelichting scoort.



- (b) Welke elementen zijn maximaal, resp. grootste, van A ?
Volgens het Hasse diagram is 111 de grootste. Dus is dit element zeker maximaal.
- (c) Welke elementen zijn minimaal, resp. kleinste, van A ?
Volgens het Hasse diagram zijn 001, 010, 100 minimaal. Er is dus geen kleinste.
- (d) Controleer of de ordening op de verzameling A totaal is.
De ordening op A is niet totaal. Bijvoorbeeld zijn de bitwoorden "010" en "001" niet vergelijkbaar.

3. Equivalentierelaties. (Cf. Opgave 8:P3) Zij E de verzameling van alle niet-lege letterwoorden van lengte ≤ 5 . Twee woorden w_1, w_2 in E staan in relatie R als ze dezelfde lengte hebben en als ze beide beginnen met een klinker of beide beginnen met een medeklinker.

- (a) Toon aan dat R een equivalentierelatie is in E .
Reflexiviteit en symmetrie zijn duidelijk. Transitief: Laat w_1, w_2, w_3 willekeurige woorden zijn in E en neem aan dat $w_1 R w_2 R w_3$. Uit $w_1 R w_2$ volgt: w_1 en w_2 hebben zelfde lengte en
(a1) ofwel beginnen ze allebei met een klinker
(a2) ofwel beginnen ze allebei met een medeklinker.
Uit $w_2 R w_3$ volgt: w_2 en w_3 hebben zelfde lengte en
(b1) ofwel beginnen ze allebei met een klinker
(b2) ofwel beginnen ze allebei met een medeklinker.
In elk geval geldt dat w_1 en w_3 dezelfde woordlengte hebben.

De combinatie (a1) met (b2) is niet mogelijk, want w2 moet aan beide tegelijk voldoen. Zo is ook de combinatie van (a2) met (b1) niet mogelijk. Twee combinaties blijven over: ofwel (a1) met (b1) gecombineerd: nu beginnen w1 en w3 beide met een klinker; ofwel (a2) met (b2) gecombineerd: nu beginnen w1 en w3 beide met een medeklinker.

In beide gevallen geldt $w1 R w3$.

- (b) Hoeveel verschillende equivalentieklassen zijn door volgende woorden vertegenwoordigd: "ja", "nee", "wel", "niet", "iets", "niets", "schei", "ai", "inf", "ik".

Woorden met verschillende lengte zijn sowieso niet equivalent. Kijk dan per lengte (2,3,4,5) welke woorden equivalent zijn:

lengte	woorden	equivalenties	aantal klassen
2	"ja", "ai", "ik"	"ai" R "ik"	2
3	"nee", "wel", "inf"	"nee" R "wel"	2
4	"niet", "iets"	-	2
5	"niets", "schei"	"niets" R "schei"	1

Totaal: 7 klassen vertegenwoordigd.

- (c) Geef een volledig representantensysteem voor de relatie R in E .

Maak onderscheid naar lengte (1 tot 5) en al dan niet beginnen met een klinker. Systematisch kiezen: beginklinker is 'a', beginmedeklinker is 'b'. Voorstel:

$\{ "a", "b", "aa", "ba", "aaa", "baa", "aaaa", "baaa", "aaaaa", "baaaa" \}$.
(10 stuks)

4. Functies.

- (a) (Algemene kennis) Gegeven een getypeerde functie $f: V \rightarrow W$, wat bedoelt men met:

- (i) f is surjectief?

f is surjectief als ieder element van het bereik W ten minste één keer optreedt als waarde van f .

Kort geformuleerd: waardengebied = bereik.

Formule: $\forall y \in W \exists x \in V, y = f(x)$.

- (i) f is injectief (ook wel een-een genoemd)?

f is injectief als elk element van het bereik W ten hoogste één keer optreedt als waarde van f .

Formule: $\forall y \in W \forall x_1, x_2 \in V, (y = f(x_1) \wedge y = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2)$.

- (i) f is totaal?

f is totaal als ieder element van V effectief een waarde (output) van f produceert.

Kort geformuleerd: Definitiegebied = domein.

Formule: $\forall x \in V \exists y \in W, x f y$.

Je antwoord mag in woorden of met een formule.

(Cf. opgave 9:P1) Welke van volgende functies zijn een-een en welke zijn veel-een. Licht je antwoord bondig toe:

- (b) $f: V \rightarrow \mathbb{N}$, waar V de verzameling $\{x: x \in \mathbb{N}, 10 \leq x < 100\}$ is en $f(n)$ de som is van de cijfers

van n (decimale voorstelling). Bv.: $f(29)=2+9=11$.

f is veel-een want 12 en 21 hebben dezelfde f -waarde 3.

- (c) $f:W \rightarrow W$, waar W de verzameling is van alle niet-lege (alfabetische) woorden, en f een woord omzet in het woord dat ontstaat als je elke letter één plaats opschuift in het alfabet ('z' wordt 'a'). Bijvoorbeeld: $f(\text{"dit"}) = \text{"eju"}$.

De functie f is een-een, want er kan als volgt een inverse functie worden gemaakt: Gegeven een woord $w \in W$ kun je elke letter een plaats terug schuiven in het alfabet ('a' wordt weer 'z'). Het zo ontstane woord heeft als f -waarde het woord w .

- (d) De functie f , gegeven door volgende tabel:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	0	1	3	5	9	11	18	17	14	5	2

Deze functie is veel-een, want 3 en 9 hebben allebei de f -waarde 5.

5. Inductie en recursie.

- (a) Een rij reële getallen $(t_n)_{n=1}^\infty := \langle t_0, t_1, t_2, \dots \rangle$ is als volgt recursief gedefinieerd.

$$t_0 := 1; \quad t_{n+1} := 3t_n - n + 1 \quad (n \geq 0).$$

Bepaal $t_1, \dots, t_4$.

$$t_{n+1} = 3 \cdot t_n - n + 1 \text{ toepassen voor } n=0, 1, 2, 3:$$

$$n=0: t_1 = 3 \cdot t_0 - 0 + 1 = 4$$

$$n=1: t_2 = 3 \cdot t_1 - 1 + 1 = 12$$

$$n=2: t_3 = 3 \cdot t_2 - 2 + 1 = 35$$

$$n=3: t_4 = 3 \cdot t_3 - 3 + 1 = 103$$

- (b) (Vervolg deel (a)) Toon aan dat $t_n = (5/4) \cdot 3^n + (1/2) \cdot n - 1/4$ voor alle $n \geq 0$.

Basis $n=0$: $(5/4) \cdot 3^0 + (1/2) \cdot 0 - 1/4 = 5/4 - 1/4 = 1$: dit is precies t_0 .

Stap $n \mapsto n+1$: Zij $n \geq 0$ willekeurig en neem aan dat

$$t_n = (5/4) \cdot 3^n + (1/2) \cdot n - 1/4. \text{ Dan is}$$

$$t_{n+1} = 3 \cdot t_n - n + 1 \text{ (recursief voorschrift)}$$

$$= 3 \cdot ((5/4) \cdot 3^n + (1/2) \cdot n - 1/4) - n + 1 \text{ (inductie hyp.)}$$

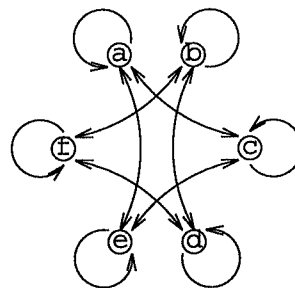
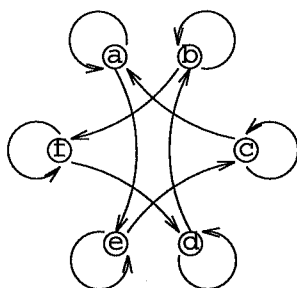
$$= (5/4) \cdot 3^{n+1} + (3/2) \cdot n - 3/4 - n + 1$$

$$= (5/4) \cdot 3^{n+1} + (1/2) \cdot n + 1/4$$

$$= (5/4) \cdot 3^{n+1} + (1/2) \cdot (n+1) - 1/2 + 1/4$$

$$= (5/4) \cdot 3^{n+1} + (1/2) \cdot (n+1) - 1/4$$

- (c) Teken in de rechterfiguur de transitieve afsluiting van de relatie, die in de linkerfiguur weergegeven is als een gerichte graaf. Het plaatje volstaat, maar goede toelichting scoort.



Merk op dat de transitieve afsluiting in dit geval een equivalentierelatie is.

Het procédé van transitieve afsluiting (vorm achtereenvolgens R , R^2 , R^3 , ..., en verenig dit alles) stabiliseert snel: R^3 is de relatie "Identiek", R^4 is dan weer R , en de cyclus herhaalt zich zonder nog iets nieuws te produceren.

Normering:

1a	3	2a	5	3a	5	4a	3	5a	3	MC	16
1b	3	2b	3	3b	5	4b	4	5b	6		
1c	5	2c	3	3c	5	4c	4	5c	6		
1d	4	2d	3			4d	4				
	15		14		15		15		15		16

Multiple choice: -3 punten per fout.

Totaal = 90; Cijfer = Behaald Totaal / 10 + 1

6. Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

M1. Welke commentaar op volgend argument is meest terzake:

Iedereen heeft soms last van stress. $\therefore$ Er zijn tijden waarop iedereen last heeft van stress.

- o Dit argument is niet geldig want er is een interpretatie mogelijk met ware premissen en onware conclusie. ☒ DEZE
- o De argumentvorm is een schakeling van vier standaard argumenten: al- en er-eliminatie, gevolgd door er- en al-(her)introductie, i.h.b. is het een geldig argument.
- o Dit argument is niet geldig. Het aaneenschakelen van al- en er-eliminatie, gevolgd door er- en al-(her)introductie, is niet correct uitgevoerd.
- o De argumentvorm is een standaard argument over omwisselen van kwantoren; i.h.b. is het een geldig argument.

M2. Neem de volgende (geldige) strategie.

	premissen	doel
Beginargument	[premissen]	$\exists x \in V Px \rightarrow Q$
Werkargument	[premissen], $y \in V, Py$	Q

De variabele x komt niet voor in Q , en de variabele y in het werkargument is nieuw en beperkt. Deze strategie is de aaneenschakeling van de strategieën

- o $\rightarrow$ eliminatie en $\exists$ introductie.
- o $\rightarrow$ eliminatie en $\exists$ eliminatie.
- o $\rightarrow$ introductie en $\exists$ introductie. ☒ DEZE
- o $\rightarrow$ introductie en $\exists$ eliminatie.

M3. Een stricte ordening ' $<$ ' in een verzameling V dient te voldoen aan:

- o $\exists x \in V, \neg(x < x)$.
- o $\forall x \in V, \neg(x < x)$. ☒ DEZE
- o $\forall x \in V \exists y \in V x < y$.
- o $\forall x \in V \forall y \in V x < y$.

M4. De binaire relatie xRy in $\mathbb{Z}$ met voorschrift " 3 deelt $x - y$ " (of, zo je wil: $x - y$ is een drievoud) is:

- o een orderrelatie in $\mathbb{Z}$.
- o een stricte orderrelatie in $\mathbb{Z}$.
- o een equivalentierelatie in $\mathbb{Z}$. ☒ DEZE
- o -- (geen van deze).

M5. Voor elk reëel getal $a \neq 0$ zijn gegeven vier functies van type $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: ADD_a , SUB_a , MUL_a , DIV_a , met voor de hand liggend functievoorschrift. De inverse functie van de samengestelde functie $MUL_3 \circ ADD_2$ is:

- o $ADD_2 \circ MUL_3$.
- o $DIV_3 \circ SUB_2$.
- o $SUB_2 \circ DIV_3$. ☒ DEZE
- o -- (de inverse is geen functie).

M6. Het principe van sterke inductie met basis b is een strategie die er als volgt uitziet.

	premissen	doel
Beginargument	[rekenregels]	$\forall n \geq b \ Pn$
Werkargument		

Het werkargument is:

- o [rekenregels], $n \geq b$, $\forall k(b \leq k < n \rightarrow P(k)) \therefore P(n)$. $\Leftrightarrow$ DEZE
- o [rekenregels], $n \geq b$, $P(n)$ $\therefore \forall k(n < k \rightarrow P(k))$.
- o [rekenregels], $n \geq b$, $\therefore P(n) \rightarrow P(n+1)$.
- o [rekenregels], $n \geq b$, $\therefore \forall k(b \leq k < n \rightarrow P(k))$.