

☞ Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet! ☞

1. Verzamelingen

- (a) Maak een Venn-diagram voor elk van de formules

$$(A \cap B) \setminus C, \quad (A \setminus C) \cap (B \setminus C),$$

en geef duidelijk aan welk gebied beschreven wordt door de formules. Zijn de twee verzamelingen gelijk?

- (b) Geef de uitspraak " $d \in (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ " weer in haar logische vorm met atomaire deeluitspraken van de vorm " $d \in A$ ", " $d \in B$ ", " $d \in C$ ", en met de voegwoorden " $\wedge$ ", " $\vee$ ", " $\neg$ ".
- (c) Hierna wordt telkens een verzameling V gegeven, samen met enkele deelverzamelingen $P_1, P_2, \dots$. Vormen de deelverzamelingen een partitie van de gegeven verzameling V ? Antwoord met "ja" of "nee"; bij "nee", geef aan wat er schort.

- (i) $V := \text{Cijfers} := \{0, 1, \dots, 9\}$ met deelverzamelingen

$$P_1 := \{0, 3, 6, 9\}, P_2 := \{2, 4, 8\}, P_3 := \{1, 5, 7\}.$$

- (ii) $V := \text{Alfabet} := \{ 'a', 'b', \dots, 'z' \}$ met deelverzamelingen

$$P_1 := \text{Klinkers} := \{ 'a', 'e', 'i', 'o', 'u' \},$$

$$P_2 := \text{MedeklinkersAtotM} := \{ x : x \text{ is een medeklinker in de range 'a' t/m 'm'} \}.$$

$$P_3 := \text{MedeklinkersNtotZ} := \{ x : x \text{ is een medeklinker in de range 'n' t/m 'z'} \}.$$

- (iii) $V := \text{Twintig} := \{01, 02, \dots, 20\}$, met negen deelverzamelingen $P_1, \dots, P_9$. Verzameling nummer k (met $1 \leq k \leq 9$) is

$$P_k := \{ x : \text{cijfersom van } x \text{ is } k \}$$

Bijvoorbeeld, P_2 is de verzameling $\{02, 11, 20\}$.

2. Relaties

De volgende drie voorschriften geven elk een binaire relatie (respectievelijk: R_1, R_2, R_3), in een gegeven verzameling *Personen*.

- (1) Relatievoorschrift voor R_1 : $x R_1 y$ betekent één van x en y is man, de ander vrouw.
- (2) Relatievoorschrift voor R_2 : $x R_2 y$ betekent x en y zijn van hetzelfde geslacht.
- (3) Relatievoorschrift voor R_3 : $x R_3 y$ betekent ten minste één van x en y is een vrouw.

Bijvoorbeeld (Aad en Ben zijn mannen, Ann en Bea zijn vrouwen) Aad R_1 Ann, maar niet Ann R_1 Bea. Bea R_2 Ann, maar niet Aad R_2 Ann. Bea R_3 Ben, maar niet Aad R_3 Ben.

- (a) (Algemene kennis) Vervolledig de definitie:

- (i) Een (binaire) relatie R in een verzameling V is *symmetrisch* wanneer geldt voor alle $x, y \in V$: (...)
- (ii) Een (binaire) relatie R in een verzameling V is *antisymmetrisch* wanneer geldt voor alle $x, y \in V$: (...)

- (b) Ga na of de relaties R_1, R_2, R_3 reflexief, symmetrisch, antisymmetrisch, dan wel transitief zijn. Ja of nee volstaat.

relatie:	reflexief?	antisymmetrisch?	symmetrisch?	transitief?
R_1				
R_2				
R_3				

- (c) We stellen enkele gelijkheden voor. Geef aan met "ja" of "nee" of de gelijkheid waar is. Bij "nee" graag toelichting.
- (i) $R_2 \circ R_1 = R_1$.
 - (ii) $R_1 \circ R_3 = R_3$.
 - (iii) $R_3 \circ R_2 = R_2$.

3. Argumentvormen en strategie

We bekijken de volgende argumentvorm met vier proposities O, E, OK, EK .

(*) $E \vee O, EK \rightarrow \neg OK, E \rightarrow EK, \therefore OK \rightarrow O$.

- (a) Geef dit argument weer in goed Nederlands met behulp van volgende interpretatiesleutel.

$E :=$ "dit getal is even"
 $O :=$ "dit getal is oneven"
 $EK :=$ "dit getal heeft een even kwadraat"
 $OK :=$ "dit getal heeft een oneven kwadraat"

- (b) De argumentvorm (*) is correct. Geef een bruikbare strategie om dit te controleren. Zo'n strategie moet een schema zijn dat begint met de regels

	premissen	doel
Beginargument	$E \vee O, EK \rightarrow \neg OK, E \rightarrow EK$	$OK \rightarrow O$
..		

- (c) Geef nu een schakeltabel (of een degelijk verbaal bewijs) van deze correctheid volgens je strategie uit (b). Je mag (als je dat eenvoudiger vindt) in dit onderdeel de interpretatie uit (b) gebruiken. Waarschuwing: laat je niet verleiden tot premissen die niet genoemd werden!
- (d) Laat zien met de methode van waarheidstabellen dat de volgende (licht gewijzigde) argumentvorm niet correct is. N.B.: onder de interpretatie uit (a) is de conclusie nochtans correct!
- (*) $E \vee O, EK \rightarrow \neg OK, E \rightarrow EK, \therefore EK \rightarrow E$.

4. Predicatenlogica

- (a) Vertaal de volgende zin met behulp van de aangegeven vertaalsleutels en onbeperkte kwantoren.

"Ieder persoon die elke redenering kan begrijpen, is een natuurtalent of heeft logica gevolgd."

Vertaalsleutel:

$Px := x$ is een persoon (waarheidsverzameling: *Personen*).
 $Rx := x$ is een redenering (waarheidsverzameling: *Redeneringen*).
 $Bxy := x$ kan y begrijpen.
 $Nx := x$ is een natuurtalent.
 $Lx := x$ heeft logica gevolgd.

De opgegeven waarheidsverzamelingen mag je gebruiken als opstapje naar je eindvertaling.

- ☞ Je scoort ook met goede tussenstappen voor de vertaling! ☞
- (b) Interpreteer de formule

$$\forall x (Dx \rightarrow \exists y (Sy \wedge \neg Vyx))$$

in een universum van personen met behulp van de aangegeven sleutel:

$Dx := x$ is een docent.

$Sx := x$ is een student.

$Vxy := x$ haalt voldoende bij y .

- (c) We hebben een universum met vier studenten (anja, bart, carl, dirk), vier docenten ($d_1, \dots, d_4$), en de volgende relatietabel voor "x haalt voldoende bij y":

$x \setminus y$	d_1	d_2	d_3	d_4
anja	+	-	+	+
bart	+	+	+	+
carl	-	+	+	-
dirk	+	+	-	+

Is de gesloten zin uit (b) waar of onwaar in dit universum? Antwoord volstaat.

- (d) Negatie uit van de formule uit (b). Laat zien door berekening dat

$$\neg \forall x (Dx \rightarrow \exists y (Sy \wedge \neg Vyx)) \equiv \exists x (Dx \wedge \forall y (Sy \rightarrow Vyx))$$

Gebruik bij elke stap een van de standaard logische equivalenties uit propositie- en predicaatlogica. ☞ Goede toelichting bij de tussenstappen scoort. ☞

Normering:

1a	6	2a	4	3a	4	4a	4	MC	20
1b	4	2b	8	3b	6	4b	4		
1c	6	2c	4	3c	6	4c	5		
				3d	4	4d	5		
	16		16		20		18		20

Voor het multiple choice gedeelte geldt: -4ptn per fout antwoord.

Totaal op 90

Cijfer = Totaal/10 + 1

Na afloop van dit tentamen vind je een volledig uitgewerkte versie van het tentamen op blackboard (Knop "Course information", folder #8). De attachment bestaat in postscript en in pdf.

Enkele standaard argumentvormen

naam	argumentvorm	evt. variant	alternatieve naam
Modus Ponens	$p \rightarrow q, p$ $\therefore q$		' $\rightarrow$ ' eliminatie regel
Modus Tollens	$p \rightarrow q, \neg q$ $\therefore \neg p$		
Disjunctief syllogisme	$p \vee q, \neg q$ $\therefore p$	$p \vee q, \neg p$ $\therefore q$	
Dilemma regel	$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r$ $\therefore r$		' $\vee$ ' eliminatie regel
Contradictieregel	$p \rightarrow \perp$ $\therefore \neg p$		' $\neg$ ' introductie regel
Ketenregel	$p \rightarrow q, q \rightarrow r$ $\therefore p \rightarrow r$		hypothetisch syllogisme
Contrapositieregel	$p \rightarrow q$ $\therefore \neg q \rightarrow \neg p$		

Enkele standaard strategieën

' $\rightarrow$ ' introductie

Beginargument:	[gegeven premissen]	$p \rightarrow q$
Werkargument:	[gegeven premissen], p	q

Contrapositie

Beginargument:	[gegeven premissen]	$p \rightarrow q$
Werkargument:	[gegeven premissen], $\neg q$	$\neg p$

' $\neg$ ' introductie

Beginargument:	[gegeven premissen]	$\neg p$
Werkargument:	[gegeven premissen], p	$\perp$

' $\vee$ ' eliminatie

Beginargument:	[gegeven premissen], $p \vee q$	[gegeven doel]
Werkargument 1:	[gegeven premissen], p	[gegeven doel]
Werkargument 2:	[gegeven premissen], q	[gegeven doel]

5. Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

5.1. A en B zijn verzamelingen. De formule $A \cap B'$ staat voor:

- ☐ Het complement van de doorsnede van A en B .
- ☐ De vereniging van A en het complement van B .
- ☐ Het symmetrisch verschil van A en B .
- ☐ A min B .

5.2. R en S zijn binaire relaties. De formule $R \circ S$ betekent:

- ☐ Eerst R , vervolgens S .
- ☐ Eerst S , vervolgens R .
- ☐ R en S , de volgorde van samenstelling maakt niet uit.
- ☐ R voor S of R na S , naargelang je van links naar rechts of van rechts naar links leest.

5.3. Een contradictie in de propositielogica is een formule

- ☐ die onwaar is wanneer alle atomaire onderdelen waar zijn.
- ☐ die altijd onwaar is ongeacht de waarheid van de atomaire onderdelen.
- ☐ die de logische vorm van een slecht geformuleerde uitspraak weergeeft.
- ☐ van de gedaante $p \rightarrow \neg p$.

5.4. De logische vorm van een uitspraak is

- ☐ de vertaling (via een vertaalsleutel) van een zin in symbolische taal.
- ☐ de interpretatie (via een interpretatiesleutel) van een formule in omgangstaal.
- ☐ de waarheidstabel van die uitspraak.
- ☐ een correct argument met deze uitspraak als doel.

5.5. De negatie van de formule $p \rightarrow \neg q$ is logisch equivalent met de formule

- ☐ $p \rightarrow q$.
- ☐ $p \wedge q$.
- ☐ $p \vee q$.
- ☐ $q \rightarrow \neg p$.

5.6. De waarheidsverzameling van de formule

$$\exists x P(x, y, z)$$

onder een gegeven interpretatie in een universum U

- ☐ is een deelverzameling van U .
- ☐ is een deelverzameling van $U \times U$ (dus een verzameling paren).
- ☐ is een deelverzameling van $U \times U \times U$ (dus een verzameling tripels).
- ☐ bestaat niet, een formule is na interpretatie een uitspraak, en dus gewoon waar of onwaar.