

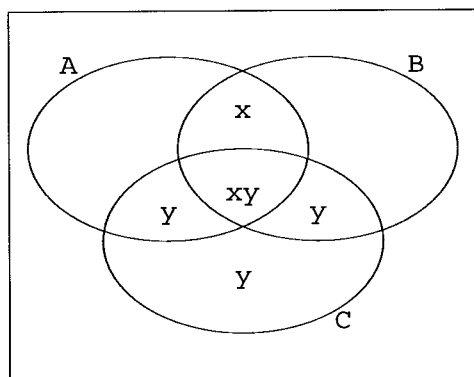
⚠ Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet! ⚠

1. Verzamelingen

- (a) Maak een Venn-diagram voor elk van de formules

$$(A \cap B) \setminus C, \quad (A \setminus C) \cap (B \setminus C),$$

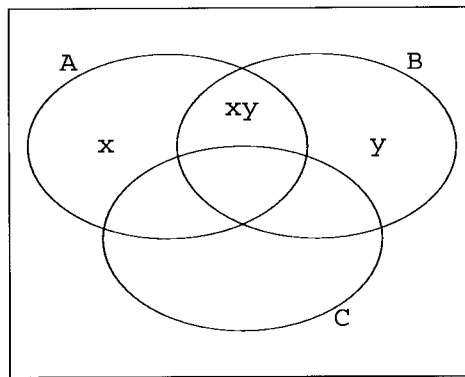
en geef duidelijk aan welk gebied beschreven wordt door de formules. Zijn de twee verzamelingen gelijk?



$$x: A \cap B$$

$$y: C$$

$$x \text{ zonder } y: (A \cap B) \setminus C$$



$$x: A \setminus C$$

$$y: B \setminus C$$

$$xy: (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$$

gelijk

- (b) Geef de uitspraak " $d \in (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ " weer in haar logische vorm met atomaire deeluitspraken van de vorm " $d \in A$ ", " $d \in B$ ", " $d \in C$ ", en met de voegwoorden " $\wedge$ ", " $\vee$ ", " $\neg$ ".

Oplossing in twee stappen:

$$d \in (A \setminus C) \wedge d \in (B \setminus C)$$

$$(d \in A \wedge \neg d \in C) \wedge (d \in B \wedge \neg d \in C)$$

De haakjes in het resultaat zijn overbodig op grond van de prioriteitenregeling.

Terzijde: de deeluitspraak " $\neg d \in C$ " komt tweemaal voor in de conjunctie. De vertaling is dus logisch equivalent met

$$d \in A \wedge d \in B \wedge \neg d \in C.$$

- (c) Hierna wordt telkens een verzameling V gegeven, samen met enkele deelverzamelingen $P_1, P_2, \dots$. Vormen de deelverzamelingen een partitie van de gegeven verzameling V ? Antwoord met "ja" of "nee"; bij "nee", geef aan wat er schort.

- (i) $V := \text{Cijfers} := \{0, 1, \dots, 9\}$ met deelverzamelingen

$$P_1 := \{0, 3, 6, 9\}, P_2 := \{2, 4, 8\}, P_3 := \{1, 5, 7\}.$$

Dit is een partitie

- (ii) $V := \text{Alfabet} := \{ 'a', 'b', \dots, 'z' \}$ met deelverzamelingen

$P_1 := \text{Klinkers} := \{ 'a', 'e', 'i', 'o', 'u' \},$

$P_2 := \text{MedeklinkersAtotM} := \{ x : x \text{ is een medeklinker in de range 'a' t/m 'm'} \}.$

$P_3 := \text{MedeklinkersNtotZ} := \{ x : x \text{ is een medeklinker in de range 'n' t/m 'z'} \}.$

Dit is een partitie

- (iii) $V := \text{Twintig} := \{ 01, 02, \dots, 20 \}$, met negen deelverzamelingen $P_1, \dots, P_9$. Verzameling nummer k (met $1 \leq k \leq 9$) is

$P_k := \{ x : \text{cijfersom van } x \text{ is } k \}$

Bijvoorbeeld, P_2 is de verzameling $\{ 02, 11, 20 \}$.

Dit is geen partitie: Het element 19 heeft cijfersom 10 en hoort tot geen enkel deel $P_1, \dots, P_9$ van de partitie.

2. Relaties

De volgende drie voorschriften geven elk een binaire relatie (respectievelijk: R_1, R_2, R_3), in een gegeven verzameling *Personen*.

- (1) Relatievoorschrift voor R_1 : $x R_1 y$ betekent één van x en y is man, de ander vrouw.
- (2) Relatievoorschrift voor R_2 : $x R_2 y$ betekent x en y zijn van hetzelfde geslacht.
- (3) Relatievoorschrift voor R_3 : $x R_3 y$ betekent ten minste één van x en y is een vrouw.

Bijvoorbeeld (Aad en Ben zijn mannen, Ann en Bea zijn vrouwen) Aad R_1 Ann, maar niet Ann R_1 Bea. Bea R_2 Ann, maar niet Aad R_2 Ann. Bea R_3 Ben, maar niet Aad R_3 Ben.

- (a) (Algemene kennis) Vervolledig de definitie:

- (i) Een (binaire) relatie R in een verzameling V is *symmetrisch* wanneer geldt voor alle $x, y \in V$: (...)
- (ii) Een (binaire) relatie R in een verzameling V is *antisymmetrisch* wanneer geldt voor alle $x, y \in V$: (...)

R is symmetrisch wanneer geldt voor alle $x, y \in V$: als $x R y$, dan ook $y R x$.

R is antisymmetrisch wanneer geldt voor alle $x, y \in V$: als $x R y$ en $y R x$, dan dient $x = y$.

- (b) Ga na of de relaties R_1, R_2, R_3 reflexief, symmetrisch, antisymmetrisch, dan wel transitief zijn. Ja of nee volstaat.

relatie:	reflexief?	antisymmetrisch?	symmetrisch?	transitief?
R_1	nee	nee	ja	nee
R_2	ja	nee	ja	ja
R_3	nee	nee	ja	nee

Toelichting (niet gevraagd):

- (1) Relatie R_1 is niet reflexief want paren in relatie zijn van de vorm $\langle \text{man}, \text{vrouw} \rangle$ of $\langle \text{vrouw}, \text{man} \rangle$ met ongelijke elementen. (dus: $x R_1 x$ gaat nooit op).
Relatie R_1 is niet transitief want je kan iets hebben als
man_A R_1 vrouw R_1 man_B
maar je hebt niet man_A R_1 man_B.
- (2) Relatie R_2 is niet antisymmetrisch want vrouw_A R_2 vrouw_B
en vrouw_B R_2 vrouw_A terwijl vrouw_A en vrouw_B verschil-

- lende personen zijn.
- (3) Relatie R_3 is niet reflexief want je hebt niet man R_3 man. Relatie R_3 is niet antisymmetrisch het tegenvoorbeeld in (2) werkt ook hier. Relatie R_3 is niet transitief want je kan iets hebben als
 $\text{man}_A R_1 \text{ vrouw } R_1 \text{ man}_B$
 maar je hebt niet $\text{man}_A R_1 \text{ man}_B$.
- (c) We stellen enkele gelijkheden voor. Geef aan met "ja" of "nee" of de gelijkheid waar is. Bij "nee" graag toelichting.
- (i) $R_2 \circ R_1 = R_1$. ☐ ja
 (ii) $R_1 \circ R_3 = R_3$. ☐ nee
 (iii) $R_3 \circ R_2 = R_2$. ☐ nee
- Toelichting bij de "nee's":
- (ii) In de samenstelling $R_1 \circ R_3$ kom je situaties tegen zoals $m R_3 v R_1 m$, wat een paar (m, m) oplevert. Zo'n paar hoort niet tot R_3 (tenminste één is een vrouw).
- (iii) In de samenstelling $R_3 \circ R_2$ kom je situaties tegen zoals $m R_2 m R_3 v$, wat een paar (m, v) oplevert. Zo'n paar hoort niet tot R_2 (zelfde geslacht).

3. Argumentvormen en strategie

We bekijken de volgende argumentvorm met vier proposities O, E, OK, EK .

(*) $E \vee O, EK \rightarrow \neg OK, E \rightarrow EK, \therefore OK \rightarrow O$.

(a) Geef dit argument weer in goed Nederlands met behulp van volgende interpretatiesleutel.

$E :=$ "dit getal is even"

$O :=$ "dit getal is oneven"

$EK :=$ "dit getal heeft een even kwadraat"

$OK :=$ "dit getal heeft een oneven kwadraat"

Dit getal is even of oneven. Is zijn kwadraat even, dan is dit kwadraat niet oneven. Is het getal even, dan ook zijn kwadraat. $\therefore$ Is het kwadraat oneven, dan is dit getal zelf oneven.

(b) De argumentvorm (*) is correct. Geef een bruikbare strategie om dit te controleren. Zo'n strategie moet een schema zijn dat begint met de regels

	premissen	doel
Beginargument	$E \vee O, EK \rightarrow \neg OK, E \rightarrow EK$	$OK \rightarrow O$
..		
	premissen	doel
Beginarg.	(1): $E \vee O$, (2): $EK \rightarrow \neg OK$, (3): $E \rightarrow EK$	$OK \rightarrow O$
Werkarg.	(1), (2), (3), (4): OK	O

Dit is de strategie van $\rightarrow$ introductie.

(c) Geef nu een schakeltabel (of een degelijk verbaal bewijs) van deze correctheid volgens je strategie uit (b). Je mag (als je dat eenvoudiger vindt) in dit onderdeel de interpretatie uit (b) gebruiken. Waarschuwing: laat je niet verleiden tot premissen die niet genoemd werden!

Schakeltabel:

premissen(n)	volgnr.	tussendoel	gebruikt argument
2,4	5	$\neg EK$	Modus Tollens
3,5	6	$\neg E$	Modus Tollens
1,6	$\therefore$	O	Disjunctief Syllogisme

(Semi-)Verbale redenering: Neem aan dat OK. Omdat $EK \rightarrow \neg OK$ volgt $\neg EK$ en omdat $E \rightarrow EK$ volgt nu $\neg E$. Aangezien E of O moet wel O gelden.

N.B.: er is meestal meer dan één bruikbare strategie. In deze opgave kun je na $\rightarrow$ introductie ook $\vee$ eliminatie plegen met premisse (1). Je hebt dan twee werkargumenten, die je kan controleren met schakelen van standaard argumentvormen. Het geheel is iets bewerkelijker dan de oplossing hierboven. Je kan na $\rightarrow$ introductie ook de strategie van het ongerijmde toepassen ($\neg O$ als extra premisse, doel wordt $\perp$). Het ontstane werkargument kun je dan snel controleren met Disjunctief Syllogisme en tweemaal Modus Ponens. Probeer maar!

- (d) Laat zien met de methode van waarheidstabellen dat de volgende (licht gewijzigde) argumentvorm niet correct is. N.B.: onder de interpretatie uit (a) is de conclusie nochtans correct!

(*) $E \vee O, EK \rightarrow \neg OK, E \rightarrow EK, \therefore EK \rightarrow E$.

We geven één kritieke regel uit de waarheidstabel van de argumentvorm, waarbij de conclusie van het argument niet waar is.

E	O	EK	OK	$E \vee O$	$EK \rightarrow \neg OK$	$E \rightarrow EK$	$EK \rightarrow E$
0	1	1	0	1	1	1	0

4. Predicatenlogica

- (a) Vertaal de volgende zin met behulp van de aangegeven vertaalsleutels en onbeperkte kwantoren.

“Ieder persoon die elke redenering kan begrijpen, is een natuurtalent of heeft logica gevolgd.”

Vertaalsleutel:

Px := x is een persoon (waarheidsverzameling: *Personen*).

Rx := x is een redenering (waarheidsverzameling: *Redeneringen*).

Bxy := x kan y begrijpen.

Nx := x is een natuurtalent.

Lx := x heeft logica gevolgd.

De opgegeven waarheidsverzamelingen mag je gebruiken als opstapje naar je eindvertaling. ☞ Je scoort ook met goede tussenstappen voor de vertaling! ☞

Het is meestal gemakkelijker om een vertaling te maken via beperkte (getypeerde) kwantoren. Daarvoor gebruiken we de hulpverzamelingen Personen en Redeneringen.

Tussenstappen:

- Globaal uitzicht:

[voor ieder persoon x] [...iets over redeneringen...]

- De kernzin aangegeven met "...iets over redeneringen..." ziet er zó uit:
 als [persoon x kan alle redeneringen y begrijpen]
 dan [persoon x is natuurtalent of heeft logica gevolgd]
- Nu de hele zin:
 [voor ieder persoon x]
 als [voor iedere redenering y] [x kan y begrijpen]
 dan [x is natuurtalent] of [x heeft logica gevolgd]
 $\forall x \in \text{Personen} (\forall y \in \text{Redeneringen } Bxy \rightarrow Nx \vee Lx)$
 Let op de prioriteitenregeling: $\forall y$ heeft voorrang op implicatie.
- Eindformule door omzetting naar onbeperkte kwantoren:
 $\forall x (Px \rightarrow (\forall y (Ry \rightarrow Bxy) \rightarrow Nx \vee Lx))$
 Let ook op de structuur van de formule:
 $\forall. (... \rightarrow (\forall. (... \rightarrow ...) \rightarrow))$
 $\forall. (... \rightarrow (... \rightarrow))$
- Volgende logisch equivalente uitspraak kan doorgaan voor een minder letterlijke, maar meer inzichtelijke vertaling:
 $\forall x (Px \wedge \forall y (Ry \rightarrow Bxy) \rightarrow Nx \vee Lx)$
 $\forall. (... \wedge \forall. (... \rightarrow ...) \rightarrow)$
 $\forall. (... \wedge \rightarrow)$
 Logische equivalentie volgt uit de zogenaamde "invoerregel" (opgave 4:H16 dictaat p.94).

(b) Interpreteer de formule

$$\forall x (Dx \rightarrow \exists y (Sy \wedge \neg Vyx))$$

in een universum van personen met behulp van de aangegeven sleutel:

$Dx := x$ is een docent.

$Sx := x$ is een student.

$Vxy := x$ haalt voldoende bij y .

- Structuur:

[voor alle x]

als [x is docent]

dan [voor sommige y] [[y is student] en
 niet [y haalt voldoende bij x]]

- Verbeterde versie:

[voor alle docenten x]

[voor sommige studenten y] niet [y haalt voldoende bij x]

- Acceptabele interpretaties:

elke docent heeft studenten die bij hem geen voldoende halen

elke docent heeft studenten die bij hem onvoldoende halen

- (c) We hebben een universum met vier studenten (anja, bart, carl, dirk), vier docenten ($d_1, \dots, d_4$), en de volgende relatietabel voor "x haalt voldoende bij y":

$x \setminus y$	d_1	d_2	d_3	d_4
anja	+	-	+	+
bart	+	+	+	+
carl	-	+	+	-
dirk	+	+	-	+

Is de gesloten zin uit (b) waar of onwaar in dit universum? Antwoord volstaat.
 "iedere docent heeft studenten met onvoldoendes" is waar:

docent d_1 : carl,
 docent d_2 : anja,
 docent d_3 : dirk,
 docent d_4 : carl.

- (d) Negatie uit van de formule uit (b). Laat zien door berekening dat

$$\neg \forall x (Dx \rightarrow \exists y (Sy \wedge \neg Vyx)) \equiv \exists x (Dx \wedge \forall y (Sy \rightarrow Vyx))$$

Gebruik bij elke stap een van de standaard logische equivalenties uit propositie- en predicaatlogica. Goede toelichting bij de tussenstappen scoort.

$\neg \forall x (Dx \rightarrow \exists y (Sy \wedge \neg Vyx)) \equiv (\text{negatie } \forall \dots)$
 $\exists x \neg (Dx \rightarrow \exists y (Sy \wedge \neg Vyx)) \equiv (\text{negatie } \rightarrow \dots)$
 $\exists x (Dx \wedge \neg \exists y (Sy \wedge \neg Vyx)) \equiv (\text{negatie } \exists \dots)$
 $\exists x (Dx \wedge \forall y \neg (Sy \wedge \neg Vyx)) \equiv (\text{negatie } \wedge \dots)$
 $\exists x (Dx \wedge \forall y (\neg Sy \vee \neg \neg Vyx)) \equiv (\text{dubbele negatie } \dots)$
 $\exists x (Dx \wedge \forall y (\neg Sy \vee Vyx)) \equiv (\text{omzetting } \rightarrow \dots)$
 $\exists x (Dx \wedge \forall y (Sy \rightarrow Vyx)).$

De voorlaatste regel is een acceptabel resultaat, maar de laatste formule vertaalt makkelijker: "er zijn docenten bij wie alle studenten voldoende halen".

Normering:

1a	6	2a	4	3a	4	4a	4	MC	20
1b	4	2b	8	3b	6	4b	4		
1c	6	2c	4	3c	6	4c	5		
				3d	4	4d	5		
	16		16		20		18		20

Voor het multiple choice gedeelte geldt: -4ptn per fout antwoord.

Totaal op 90

Cijfer = Totaal/10 + 1

5. Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

5.1. A en B zijn verzamelingen. De formule $A \cap B'$ staat voor:

- ☐ Het complement van de doorsnede van A en B .
- ☐ De vereniging van A en het complement van B .
- ☐ Het symmetrisch verschil van A en B .
- ☐ A min B . ☒ DEZE

Toelichting:

Optie 1: de operatie "complement" ($'$) is prioritair t.o.v. doorsnede (dus wordt de operatie meteen toegepast op B nog voor $\dots \cap \dots$ aan de slag gaat).

Optie 2: $\cap$ is het doorsnedeteken.

Optie 3: $A \cap B'$ is helemaal niet symmetrisch!

5.2. R en S zijn binaire relaties. De formule $R \circ S$ betekent:

- ☐ Eerst R , vervolgens S .
- ☐ Eerst S , vervolgens R . ☒ DEZE
- ☐ R en S , de volgorde van samenstelling maakt niet uit.
- ☐ R voor S of R na S , naargelang je van links naar rechts of van rechts naar links leest.

Toelichting:

Optie 1: verkeerde volgorde.

Optie 2 is goed want bolletje moet je lezen als "na".

Optie 3: de volgorde van samenstelling maakt wél uit.

Optie 4: onzin, er zijn eenduidige afspraken nodig.

5.3. Een contradictie in de propositielogica is een formule

- ☐ die onwaar is wanneer alle atomaire onderdelen waar zijn.
- ☐ die altijd onwaar is ongeacht de waarheid van de atomaire onderdelen. ☒ DEZE
- ☐ die de logische vorm van een slecht geformuleerde uitspraak weergeeft.
- ☐ van de gedaante $p \rightarrow \neg p$.

Toelichting:

Optie 1: de formule moet in alle omstandigheden onwaar zijn.

Optie 3: slecht geformuleerde uitspraken worden niet bestudeerd.

Optie 4: dit lijkt wel een contradictie, maar is het niet: de implicatie is correct (belofteremodel) indien p onwaar is.

5.4. De logische vorm van een uitspraak is

- ☐ de vertaling (via een vertaalsleutel) van een zin in symbolische taal. ☒ DEZE
- ☐ de interpretatie (via een interpretatiesleutel) van een formule in omgangstaal.
- ☐ de waarheidstabel van die uitspraak.
- ☐ een correct argument met deze uitspraak als doel.

Optie 2: het is net andersom (van omgangstaal naar formuletaal).

Optie 3: dit is een waarheidscontrole in een tabel, geen formule.

Optie 4: "logische vorm" heeft niets te maken met waar/onwaar, enkel met de "vorm" van de formule.

5.5. De negatie van de formule $p \rightarrow \neg q$ is logisch equivalent met de formule

- o $p \rightarrow q$.
- o $p \wedge q$. ~~DEZE~~
- o $p \vee q$.
- o $q \rightarrow \neg p$.

Gebruik het "belofteremodel": een foute implicatie betekent: hypothese (voorwaarde) OK, conclusie (wat je belooft) niet OK.

Optie 1: voor p onwaar en q eender zijn $p \rightarrow \neg q$ en $p \rightarrow q$ allebei waar. Ontkenning van de eerste is dus niet de tweede.

Optie 3: voor p onwaar en q waar zijn $p \rightarrow \neg q$ en $p \vee q$ allebei waar. Ontkenning van de eerste is dus niet de tweede.

Optie 4: deze formule ontstaat uit de gegeven formule door contrapositie, en is dus logisch equivalent met de gegeven formule, het tegenovergestelde van wat bedoeld wordt.

5.6. De waarheidsverzameling van de formule

$$\exists x P(x, y, z)$$

onder een gegeven interpretatie in een universum U

- o is een deelverzameling van U .
- o is een deelverzameling van $U \times U$ (dus een verzameling paren). ~~DEZE~~
- o is een deelverzameling van $U \times U \times U$ (dus een verzameling tripels).
- o bestaat niet, een formule is na interpretatie een uitspraak, en dus gewoon waar of onwaar.

Toelichting: de waarheidsverzameling "registreert" de waarden van de vrije variabelen waarvoor de zin waar is. Zijn er twee vrije variabelen (zoals in deze vraag), dan moet je van beide een waarde hebben vooraleer je een beslissing kunt nemen over waar/onwaar. Je verzamelt dan paren. Opties 1 en 3 vallen daarmee af. Optie 4 is volkomen fout: de interpretatie van een open zin bevat een neutraal onderwerp, en dus valt er weinig te zeggen over waar/onwaar.