



1. Verzamelingen en relaties.

- (a) In een universum U met 33 elementen zijn drie verzamelingen A, B, C gegeven, elk met 15 elementen. Verder is gegeven dat

$$\#(A \cap B \cap C) = 1,$$

$$\#(A \cap B) = 6, \quad \#(B \cap C) = 5, \quad \#(C \cap A) = 4.$$

Bepaal volgende aantallen met behulp van Venn-diagrammen:

- (i) $\#A \setminus (B \cup C)$.
 - (ii) $\#(A \cup B) \setminus C$.
 - (iii) $\#U \setminus (A \cup B \cup C)$.
- (b) Vereenvoudig zover mogelijk met behulp van verzamelingenalgebra. Geef daarbij aan welke wetten je gebruikt. Het universum is U .

$$(A' \cup (A \cap B'))'.$$

- (c) Zij A de verzameling letters $\{ 'a', 'b', 'c', 'd' \}$, en zij B de verzameling $\{ 1, 2, 3, 4 \}$ (opgevat als posities in het alfabet). Gegeven zijn twee relaties

$$R := \{ \langle x, y \rangle : x, y \in A, \text{ letter } x \text{ komt strict vóór letter } y \},$$

$$S := \{ \langle x, y \rangle : \text{letter } x \text{ komt op positie } y \}.$$

- (i) Geef de beide relaties R, S weer door opsomming en geef van beide opsommingen het precieze aantal elementen (aantal paren in de relatie).
- (ii) Geef de samengestelde relatie $S \circ R$ weer door opsomming en via een relatievoorschrift.

2. Propositielogica

- (a) Algemene kennis:
- (i) In een argumentvorm met drie premissen en een conclusie treden in totaal zes atomaire proposities op. Je wilt deze vorm testen met een waarheidstabel. Hoeveel regels bevat de (body van de) volledige waarheidstabel?
 - (ii) Wat bedoelt men met "een kritieke regel" in een waarheidstabel bij een argumentvorm?
 - (iii) Wat bedoelt men in de propositielogica precies met "een geldige argumentvorm"?

Voor de rest van deze opgave bekijken we de volgende argumentvorm:

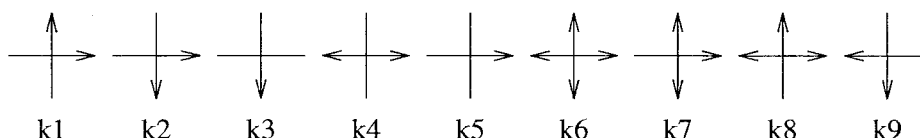
$$p \vee q \rightarrow r$$

$$\therefore (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

- (b) Controleer de argumentvorm op geldigheid door middel van een waarheidstabel.
- (c) Geef een combinatiestrategie om deze argumentvorm te controleren.
- (d) Geef nu bij elk werkargument uit (c) een geschakeld argument om het werkargument te bewijzen.

3. Predicatenlogica

- (a) Algemene kennis:
- (i) Geef een logisch equivalente formule voor de beperkte er-kwantor:
 $\exists x \in A, Px \equiv \exists x (\quad)$.
 - (ii) Geef een logisch equivalente formule voor de beperkte al-kwantor:
 $\forall x \in A, Px \equiv \forall x (\quad)$.
- (b) Vertaal volgende zin met de aangegeven vertaalsleutel. Zorg ervoor dat het antwoord geen overbodige haakjes bevat.
 "Als iedereen aardig is, is niemand bang voor iemand".
 $Ax := "x \text{ is aardig}"$
 $Bxy := "x \text{ is bang voor } y"$
- (c) Bewijs door de aangegeven argumentvormen aaneen te schakelen in een geschikte volgorde.
 $\exists x (Q_1x \vee Q_2x), \forall x (Q_1x \rightarrow Px), \forall x (Q_2x \rightarrow Px), \therefore \exists x Px$
 (er-eliminatie regel, al-eliminatie regel, of-eliminatie regel, er-introductie regel).
- (d) Situatie-logica. Gegeven is een universum van kruisen waarvan sommige armen een pijlpunt hebben en andere niet. Laat Bx, Ox, Lx, Rx respectievelijk uitdrukken dat x een pijl naar boven, onder, links, of rechts heeft.



- (i) Geef de waarheidsverzameling van de open zin $\neg Bx \wedge \neg Ox$
- (ii) Geef de interpretatie in vlot en correct Nederlands: $\forall x (Lx \rightarrow \neg Bx \wedge \neg Ox)$.
- (iii) Volgende zin is niet waar in dit universum: $\forall x (Lx \wedge Rx \rightarrow Bx \vee Ox)$. Leg uit waarom niet.

4. Ordening en equivalentie

- (a) Algemene kennis:
- (i) Gegeven is een verzameling V met deelverzameling A , een partiële ordening $\leq$ in V , en een element p van V . Geef in symbolische vorm de definitie van volgende noties:
 - (1) p is het grootste element van A .
 - (2) p is een maximaal element van A .
 - (ii) Wat bedoelt men met een volledig representantensysteem van een equivalentierelatie R in een verzameling V ?
- (b) Neem $V := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ met de Cartesische ordening (uitgaande van de natuurlijke ordening op $\mathbb{Z}$), en zij A de deelverzameling
 $\{ \langle x, y \rangle : 1 \leq x, 1 \leq y, 3 \leq x+y \leq 5 \} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
 Teken een Hasse diagram met de elementen van A .
- (c) (vervolg onderdeel (b)).
- (i) Heeft A een grootste element? Zo ja, geef dit element; zo niet, geef alle maximale elementen van A .
 - (ii) Heeft A een kleinste element? Zo ja, geef dit element; zo niet, geef alle minimale elementen van A .

- (d) In de verzameling A kunnen we ook een equivalentierelatie $\equiv$ bekijken met volgend voorschrift.

$$\langle x_1, x_2 \rangle \equiv \langle y_1, y_2 \rangle \text{ betekent } x_1 + x_2 = y_1 + y_2.$$

- (i) Geef een volledig representantensysteem voor de relatie ' $\equiv$ '.
 (ii) Hoeveel equivalentieklassen zijn er op basis van je antwoord in sub-onderdeel (i)?

5. Functies

- (a) Algemene kennis:

- (i) Wat is het verschil tussen domein en definitiegebied van een functie?
 (ii) Wat is het verschil tussen bereik en waardengebied van een functie?

Voor de rest van deze opgave zijn de functies $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ en $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gegeven met als respectievelijk functievoorschrift:

$$f(x) = x^2; \quad g(x) = x/2; \quad h(x) = x - 5.$$

- (b) Geef het definitiegebied en het waardengebied van de functies f , g en h .
 (c) Vul volgende tabel in met de juiste waarde, indien er een waarde is.

$x =$	3	4	5	6	7	8	9
$f \circ g$							
$g \circ h$							
$h \circ f$							

- (d) Geef voor f , g , en h , aan of hun inverse bestaat, en (zo ja) wat het functievoorschrift is voor de inverse functie.

6. Inductie en Recursie

- (a) Algemene kennis:

- (i) Zij R een relatie in een eindige verzameling A . Hoe komt men aan een weergave van R in matrixvorm?
 (ii) Het (gewone) principe van inductie is een strategie bij het werken met gehele getallen. De premissen van het beginargument vormen een standaardlijst van wetten in $\mathbb{Z}$. Hoe ziet het doel van dit beginargument eruit, en wat is de vorm van de werkargumentatie (met één of meer werkargumenten)?
 (iii) Wat bedoelt men met "de transitieve afsluiting van een relatie"?

- (b) Een rij natuurlijke getallen k_n voor $n \geq 0$ wordt als volgt recursief gedefinieerd.

$$k_0 := 1, \quad k_{n+1} := 3 \cdot k_n + 2 \cdot 3^{n+1}.$$

- (i) Bereken de termen k_1, k_2, k_3 .
 (ii) Toon aan met inductie naar $n \geq 0$ dat $k_n = (2n+1) \cdot 3^n$.

- (c) Gegeven is een verzameling A met 4 punten en een binaire relatie R in A (in matrixvorm):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Geef de transitieve afsluiting van R weer in matrixvorm. Suggestie: je mag eender welke voorstellingswijze gebruiken voor de oplossing. Maar het eindresultaat moet wel in matrixvorm worden weergegeven.

Normering:

1a	4	2a	3	3a	2	4a	2	5a	2	6a	3	M	16
1b	4	2b	4	3b	3	4b	5	5b	3	6b	4		
1c	4	2c	3	3c	4	4c	4	5c	3	6c	4		
		2d	3	3d	4	4d	3	5d	3				
12		13		13		14		11		11		16	

(Multiple-choice gedeelte: -3punten per fout)

Totaal = 90

Cijfer = Totaal/10 + 1

Ter informatie bij opgave 1:

Commutativiteit:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Associativiteit:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

Distributiviteit:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Identiteiten:

$$A \cup U = U \text{ en } A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap U = A \text{ en } A \cap \emptyset = \emptyset$$

Idempotentie:

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

Complement:

$$A \cup A' = U$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

DeMorgan's wetten:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Involutie:

$$(A')' = A$$

Tabel 1: Wetten van de verzamelingen-algebra

naam, studierichting & jaar:

11-02-04

Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

M1. R en S zijn binaire relaties. De formule $R \circ S$ betekent:

- Eerst R , vervolgens S .
- Eerst S , vervolgens R .
- R en S , de volgorde van samenstelling maakt niet uit.
- R voor S of R na S , naargelang je van links naar rechts of van rechts naar links leest.

M2. Welke van de volgende vier waarheidstabellen evalueert de formule $p \vee q \rightarrow \neg q$ juist:

p	q	$p \vee q \rightarrow \neg q$	$p \vee q \rightarrow \neg q$	$p \vee q \rightarrow \neg q$	$p \vee q \rightarrow \neg q$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
		Tabel 1	Tabel 2	Tabel 3	Tabel 4

- Tabel 1.
- Tabel 2.
- Tabel 3.
- Tabel 4.

M3. Welk commentaar op volgend argument is meest terzake:

Iedereen heeft soms last van stress. $\therefore$ Er zijn tijden waarop iedereen last heeft van stress.

- De argumentvorm is een standaard argument over omwisselen van kwantoren; i.h.b. is het een geldig argument.
- De argumentvorm is een schakeling van vier standaard argumenten: al- en er-eliminatie, gevolgd door er- en al-(her)introductie, i.h.b. is het een geldig argument.
- Dit argument is niet geldig. Het aaneenschakelen van al- en er-eliminatie, gevolgd door er- en al-(her)introductie, is niet correct uitgevoerd.
- Dit argument is niet geldig want er is een interpretatie mogelijk met ware premissen en onware conclusie.

M4. Zij $f: V \rightarrow W$ een totale functie. De binaire relatie xRy in V met voorschrift " $fx = fy$ " is:

- een (totale) orderrelatie in V .
- een stricte orderrelatie in V .
- een equivalentierelatie in V .
- -- (geen van deze).

M5. Voor elk reëel getal $a \neq 0$ zijn vier functies van type $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven: ADD_a , SUB_a , MUL_a , en DIV_a met voor de hand liggende functievoorschriften. De formule voor de samengestelde functie $DIV_3 \circ SUB_2 \circ MUL_4(x)$ is

- $(4x - 2)/3$.
- $4x/3 - 2$.
- $4(x/3 - 2)$.

- o -- (geen van deze formules is correct).

M6. Het ordeningsprincipe in $\mathbb{Z}$ stelt dat:

- o iedere niet-lege verzameling in $\mathbb{Z}$ een ondergrens heeft.
- o iedere niet-lege verzameling in $\mathbb{Z}$ een bovengrens heeft.
- o iedere niet-lege naar onder begrensde verzameling in $\mathbb{Z}$ een kleinste element heeft.
- o iedere niet-lege naar boven begrensde verzameling in $\mathbb{Z}$ een kleinste element heeft.