

Faculteit Exacte Wetenschappen

Logische Taal en Redeneermethoden

Vrije Universiteit Amsterdam

DeelTentamen II: 19-12-03

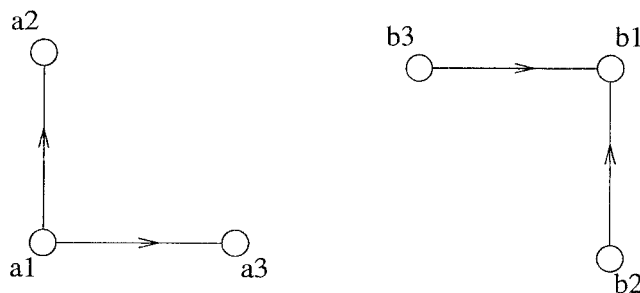
Opgelet: er is een apart multiple-choice gedeelte op de laatste pagina. Schrijf op dat blad je naam en lever het mee in met je overige tentamenkopij!

1. Argumentvorm en strategie. Gegeven is de volgende argumentvorm.

$\forall x (Gx \rightarrow Wx),$
 $\forall x (\neg Gx \rightarrow Ox),$
 $\therefore \forall x (Wx \vee Ox).$

- (a) Algemene kennis.
- (i) Een argumentvorm bestaat uit een (eindige) lijst van zinsvormen (de premissen), gevolgd door nog een zinsvorm (het doel of de conclusie). Wat bedoelt men in de predatenlogica met: een geldige argumentvorm?
 - (ii) Een strategie bestaat uit een "begin"argument (een argumentvorm), gevolgd door een of meer "werk"argumenten (argumentvormen). Wat bedoelt men in de predatenlogica met: een geldige strategie?
- (b) Geef een interpretatie van de gegeven argumentvorm aan de hand van de volgende sleutel.
- $Gx :=$ "x heeft voldoende geld",
 $Wx :=$ "x rijdt met zijn eigen wagen",
 $Ox :=$ "x gaat met het openbaar vervoer".
- (c) Ontwerp een bruikbare strategie om de geldigheid van de argumentvorm uit (b) te controleren, en controleer vervolgens je werkargument(en) met een aaneenschakeling van geldige argumenten.
- (d) In de oorspronkelijke argumentvorm uit deel (b) veranderen we het doel $\forall x (Wx \vee Ox)$ in: $\exists x (\neg Wx \vee \neg Ox)$. Geef een interpretatie in een universum waaruit blijkt dat het nieuwe voorstel géén geldige argumentvorm is.

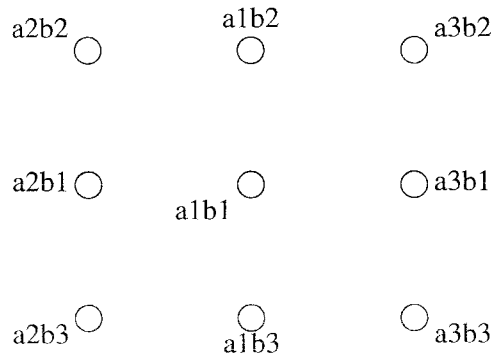
2. Orderelaties. We hebben twee verzamelingen $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ en $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, elk met een partiële ordening ' $\leq$ ' gegeven via volgende Hasse diagrammen.



In deze opgave kijken we naar de Cartesische ordening van $A \times B$ (onderdelen (b) en (c)) en naar de lexicografische ordening van $A \times B$ (onderdeel (d)).

- (a) Algemene kennis.
- (i) Geef het voorschrift voor de Cartesische ordening in een productverzameling $A \times B$.

- (ii) Geef het voorschrift voor de lexicografische orde in een productverzameling $A \times B$.
- (b) Ontwerp een Hasse diagram voor $A \times B$ met de Cartesische ordening. Je mag de bijgevoegde figuur gebruiken, waar alle punten zó geplaatst zijn dat het resultaat overzichtelijk blijft. Toelichting hoeft niet.



Een paar als $\langle a1, b2 \rangle$ is hier weergegeven als "a1b2".
De figuur is overgenomen op het aparte Multiple choice blad.

- (c) Geef alle maximale en minimale elementen van $A \times B$ in de Cartesische ordening. Toelichting hoeft niet.
- (d) De lexicografische ordening van $A \times B$ is niet totaal. Geef een voorbeeld van twee niet-vergelijkbare elementen in $A \times B$. Toelichting hoeft niet.

3. Functies en equivalentierelaties. Laat W_3 de verzameling zijn van alle drie-letter woorden met letters uit het alfabet $A := \{ 'a', 'b', \dots, 'z' \}$. We noteren twee deelverzamelingen van de verzameling A :

$K := \{ 'a', 'e', 'i', 'o', 'u', 'y' \}$, (de zes klinkers), $M = A \setminus K$ (de twintig medeklinkers).

(We vatten hier de 'y' op als de zesde klinker.) Verder hebben we twee functies als volgt gedefiniëerd.

- $f: W_3 \rightarrow W_3$ kent aan een woord $w \in W_3$ het drie-letter woord toe dat ontstaat als je elke medeklinker in w vervangt door een 'x'. Bijvoorbeeld: $f("pap") = "xax"$.
- $g: W_3 \rightarrow W_3$ kent aan een woord $w \in W_3$ het drie-letter woord toe dat ontstaat als je elke klinker in w vervangt door een 'y'. Bijvoorbeeld: $g("aap") = "yyp"$.

- (a) Algemene kennis.
- (i) Wat bedoelt men met: een equivalentierelatie R in een verzameling V ?
- (ii) Gegeven een equivalentierelatie R in een verzameling V , wat bedoelt men met: de R -equivalentieklasse van een element $p \in V$?
- (b) Laat zien dat f en g totale (getypeerde) functies zijn.
- (c) Volgens de theorie ontstaat een equivalentierelatie (voor deze gelegenheid R_f genoemd) via het relatievoorschrift

$$w_1 R_f w_2 \text{ betekent } f(w_1) = f(w_2).$$

Hoeveel elementen zijn er in de equivalentieklasse $["wat"]$ en in de equivalentieklasse $["yep"]$? Goede toelichting scoort.

- (d) Nog steeds volgens de theorie ontstaat ook een equivalentierelatie (voor deze gelegenheid R_g genoemd) via het relatievoorschrift

$$w_1 R_g w_2 \text{ betekent } g(w_1) = g(w_2).$$

Hoeveel elementen zijn er ditmaal in de equivalentieklasse $["wat"]$ en in de equivalentieklasse $["yep"]$? Goede toelichting scoort.

- (e) Volgens het recept van de onderdelen (c) en (d) kunnen we tenslotte een equivalentierelatie

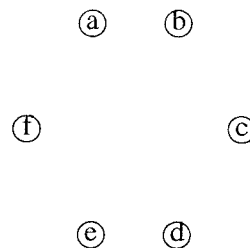
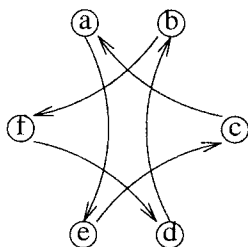
$R_{g \circ f}$ bouwen met het relatievoorschrift

$w_1 R_{g \circ f} w_2$ betekent $(g \circ f)(w_1) = (g \circ f)(w_2)$.

Hoeveel equivalentieklassen heeft $R_{g \circ f}$? Geef een volledig representantensysteem waaruit dit aantal blijkt. Goede toelichting scoort.

4. Inductie en recursie.

- (a) Algemene kennis.
- Formuleer de strategie van (gewone) natuurlijke inductie. Je mag het antwoord geven in de vorm van een strategietabel of in verbale vorm.
 - Gegeven een (binaire) relatie R in een verzameling V , wat bedoelt men met: de transitieve afsluiting van R ?
- (b) Een rij reële getallen $(t_n)_{n=1}^{\infty} := \langle t_0, t_1, t_2, \dots \rangle$ is als volgt recursief gedefinieerd.
- $$t_0 := 1; \quad t_{n+1} := 3t_n - n + 1 \quad (n \geq 0).$$
- Bepaal $t_1, \dots, t_4$.
 - Toon aan dat $t_n = (5/4) \cdot 3^n + (1/2) \cdot n - 1/4$ voor alle $n \geq 0$.
- (c) Teken in de rechterfiguur de transitieve afsluiting van de relatie, die in de linkerfiguur weergegeven is als een gerichte graaf. Goede toelichting scoort.



De figuur is overgenomen op het aparte Multiple choice blad.

Normering:

1a	4	2a	4	3a	4	4a	4	MC	20
1b	3	2b	6	3b	3	4b	6		
1c	7	2c	4	3c	4	4c	7		
1d	3	2d	3	3d	4				
				3e	4				
17		17		19		17			20

Voor het multiple choice gedeelte geldt: -4 ptn per fout.

Totaal = 90; **Cijfer** = $\frac{\text{Totaal}}{10} + 1$.

- ☞ Dit cijfer kan nog worden verhoogd met 1/2 bonuspunt voor goed huiswerk.
- ☞ Voor dit tentamen heb je twee uur de tijd.

Enkele standaard strategieën

$\rightarrow$ introductie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$P \rightarrow Q$
Werkargument:	[gegeven premissen], P	Q

Contrapositie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$P \rightarrow Q$
Werkargument:	[gegeven premissen], $\neg Q$	$\neg P$

$\vee$ introductie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$P \vee Q$
Werkargument:	[gegeven premissen], $\neg P$	Q

Ongerijmde	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$\neg P$
Werkargument:	[gegeven premissen], P	$\perp$

$\vee$ eliminatie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen], $P \vee Q$	[gegeven doel]
Werkargument 1:	[gegeven premissen], P	[gegeven doel]
Werkargument 2:	[gegeven premissen], Q	[gegeven doel]

$\forall$ introductie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$\forall x P(x)$
Werkargument:	[gegeven premissen]	$P(y)$
	(y niet vrij in de premissen)	

$\exists$ introductie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$\exists x P(x)$
Werkargument:	[gegeven premissen]	$P(t)$
	(t een term)	

$\forall$ eliminatie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen], $\forall x P(x)$	[gegeven doel]
Werkargument:	[gegeven premissen], $P(t)$	[gegeven doel]
	(t een term)	

$\exists$ eliminatie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen], $\exists x P(x)$	[gegeven doel]
Werkargument:	[gegeven premissen], $P(y)$	[gegeven doel]
	(y een nieuwe, beperkte variabele)	

naam, studierichting & jaar:

LTR II, 19-12-03

Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

6.1. In wat volgt is x een variabele en c een constante. Het argument van al-introductie toepassen op de formule $P(x, c)$ levert:

- ☐ $\forall y P(x, y).$
- ☐ $\forall y P(y, c).$
- ☐ $\forall y \forall z P(y, z).$
- ☐ $\forall y \exists z P(y, z).$

6.2. Een stricte ordening $<$ in een verzameling V is antireflexief. Dit betekent:

- ☐ $\exists x \in V, \neg(x < x).$
- ☐ $\forall x \in V, \neg(x < x).$
- ☐ $\forall x \in V \forall y \in V (x < y \rightarrow \neg y < x).$
- ☐ $\exists x \in V \exists y \in V \neg(x < y \wedge y < x).$

6.3. De binaire relatie $x R y$ in $\mathbb{Z}$ met voorschrift " 5 is een deler van $x - y$ " (of, zo je wil: $x - y$ is een vijfvoud) is:

- ☐ een orderrelatie in $\mathbb{Z}$.
- ☐ een stricte orderrelatie in $\mathbb{Z}$.
- ☐ een equivalentierelatie in $\mathbb{Z}$.
- ☐ -- (geen van deze).

6.4. Een functie $f: V \rightarrow W$ is 1-1 (injectief) als

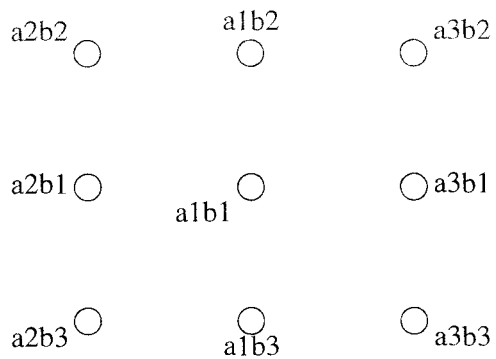
- ☐ $\forall x \in V \forall y \in V (f(x) = f(y) \rightarrow x = y).$
- ☐ $\forall x \in V \forall y_1 \in W \forall y_2 \in W (x f y_1 \wedge x f y_2 \rightarrow y_1 = y_2).$
- ☐ $\forall x \in V \exists y \in W x f y.$
- ☐ $\forall y \in W \exists x \in V x f y.$

6.5. Voor elk reëel getal $a \neq 0$ zijn gegeven vier functies van type $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: ADD_a , SUB_a , MUL_a , DIV_a , met voor de hand liggend functievoorschrift. De inverse functie van de samengestelde functie $MUL_3 \circ ADD_2$ is:

- ☐ $ADD_2 \circ MUL_3.$
- ☐ $DIV_3 \circ SUB_2.$
- ☐ $SUB_2 \circ DIV_3.$
- ☐ -- (de inverse is geen functie).

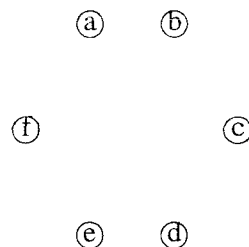
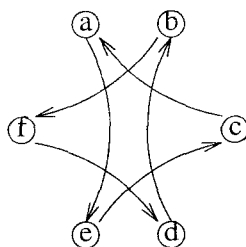
6.6. Het ordeningsprincipe in $\mathbb{Z}$ stelt dat:

- ☐ iedere niet-lege verzameling in $\mathbb{Z}$ een ondergrens heeft.
- ☐ iedere niet-lege verzameling in $\mathbb{Z}$ een bovengrens heeft.
- ☐ iedere niet-lege naar onder begrensde verzameling in $\mathbb{Z}$ een kleinste element heeft.
- ☐ iedere niet-lege naar boven begrensde verzameling in $\mathbb{Z}$ een kleinste element heeft.



Een paar als $\langle a_1, b_2 \rangle$ is hier weer-
gegeven als " a_1b_2 ".

Figuur bij opgave 2(b): Hasse diagram.



Figuur bij opgave 4(b): Transitieve afsluiting.