

Opgelet: er is een apart multiple-choice gedeelte op de laatste pagina. Schrijf op dat blad je naam en lever het mee in met je overige tentamenkopij!



1. Argumentvorm en strategie. Gegeven is de volgende argumentvorm.

$\forall x (Gx \rightarrow Wx),$
 $\forall x (\neg Gx \rightarrow Ox),$
 $\therefore \forall x (Wx \vee Ox).$

(a) Algemene kennis.

- (i) Een argumentvorm bestaat uit een (eindige) lijst van zinsvormen (de premissen), gevolgd door nog een zinsvorm (het doel of de conclusie). Wat bedoelt men in de predicaatlogica met: een geldige argumentvorm?

Telkens alle premissen waar zijn, is ook het doel waar. Met "telkens" bedoelen we: bij elke interpretatie in een geschikt universum en (voor zover van toepassing) voor elke waarde van de vrije variabelen.

- (ii) Een strategie bestaat uit een "begin"argument (een argumentvorm), gevolgd door een of meer "werk"argumenten (argumentvormen). Wat bedoelt men in de predicaatlogica met: een geldige strategie?

Als alle werkargumenten geldige argumentvormen zijn, dan is ook het beginargument een geldige argumentvorm.

(b) Geef een interpretatie van de gegeven argumentvorm aan de hand van de volgende sleutel.

Gx := "x heeft voldoende geld",
 Wx := "x rijdt met zijn eigen wagen",
 Ox := "x gaat met het openbaar vervoer".

Interpretatie: Iedereen die voldoende geld heeft, rijdt met zijn eigen wagen. Iedereen die onvoldoende geld heeft, gaat met het openbaar vervoer. $\therefore$ Iedereen rijdt met zijn eigen wagen of gaat met het openbaar vervoer.

(c) Ontwerp een bruikbare strategie om de geldigheid van de argumentvorm uit (b) te controleren, en controleer vervolgens je werkargument(en) met een aaneenschakeling van geldige argumenten.

Combinatiestrategie: al-introductie gevolgd door of-introductie.

	premissen	doel
Beginargument	(1) : $\forall x (Gx \rightarrow Wx),$ (2) : $\forall x (\neg Gx \rightarrow Ox)$	$\forall x (Wx \vee Ox)$
Tussenargument	(1), (2)	$Wy \vee Oy$
Werkargument	(1), (2), (3) : $\neg Wy$	Oy

De variabele y in het werkargument is beperkt. Controle van

het werkargument met een schakeling van geldige argumenten:

premissen(n)	volgnr+conclusie	gebruikt argument
(1)	(4): $Gy \rightarrow Wy$	al-eliminatie
(4), (3)	(5): $\neg Gy$	Modus tollens
(2)	(6): $\neg Gy \rightarrow Oy$	al-eliminatie
(6), (5)	$\therefore Oy$	Modus ponens

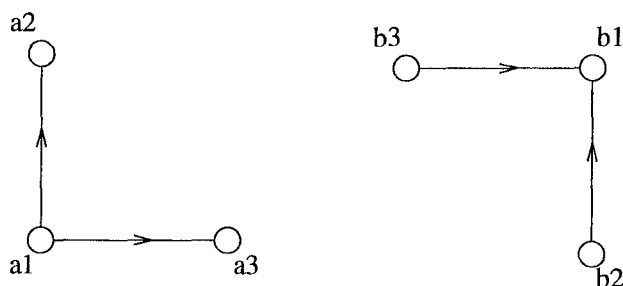
- (d) In de oorspronkelijke argumentvorm uit deel (b) veranderen we het doel $\forall x (Wx \vee Ox)$ in: $\exists x (\neg Wx \vee \neg Ox)$. Geef een interpretatie in een universum waaruit blijkt dat het nieuwe voorstel géén geldige argumentvorm is.

We nemen een universum met één persoon p . In ons ontwerp geldt verder: de unieke persoon heeft voldoende geld, rijdt (wel eens) met de eigen wagen, en gebruikt (wel eens) het openbaar vervoer.

x	Gx	Wx	Ox
p	+	+	+

In dit universum heeft iedereen met geld een eigen wagen en gaat iedereen zonder geld met het openbaar vervoer. Maar er is geen persoon met de eigenschap: hij/zij heeft geen eigen wagen of hij/zij gaat niet met het openbaar vervoer.

2. Orderrelaties. We hebben twee verzamelingen $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ en $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, elk met een partiële ordening ' $\leq$ ' gegeven via volgende Hasse diagrammen.



In deze opgave kijken we naar de Cartesische ordening van $A \times B$ (onderdelen (b) en (c)) en naar de lexicografische ordening van $A \times B$ (onderdeel (d)).

(a) Algemene kennis.

- (i) Geef het voorschrift voor de Cartesische ordening in een productverzameling $A \times B$.

Noem de ordening op de eerste factor even $\leq_1$ en noem de ordening op de tweede factor even $\leq_2$. Het voorschrift is dan:

$\langle x_1, x_2 \rangle \leq \langle y_1, y_2 \rangle$ betekent: $x_1 \leq_1 y_1 \wedge x_2 \leq_2 y_2$.

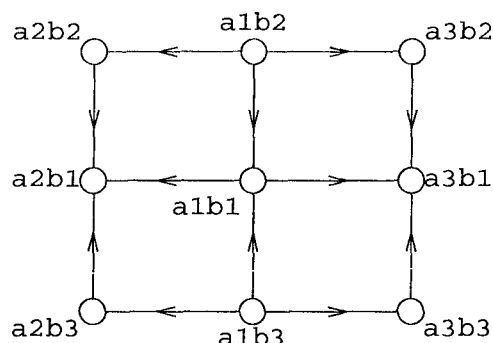
- (ii) Geef het voorschrift voor de lexicografische orde in een productverzameling $A \times B$.

Noem de ordening op de eerste factor even $\leq_1$ en noem de ordening op de tweede factor even $\leq_2$. Het voorschrift is dan:

$\langle x_1, x_2 \rangle \leq \langle y_1, y_2 \rangle$ betekent: $x_1 <_1 y_1 \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 \leq_2 y_2)$.

- (b) Ontwerp een Hasse diagram voor $A \times B$ met de Cartesische ordening. Je mag de bijgevoegde figuur gebruiken, waar alle punten zó geplaatst zijn dat het resultaat overzichtelijk blijft. Toelichting hoeft niet.

We tekenen het Hasse diagram in het meegegeven rooster van punten:



Een paar als $\langle a_1, b_2 \rangle$ is hier weergegeven als "a1b2".

- (c) Geef alle maximale en minimale elementen van $A \times B$ in de Cartesische ordening. Toelichting hoeft niet.

We oordelen op basis van het Hasse diagram:

Maximaal zijn: $\langle a_2, b_1 \rangle$ en $\langle a_3, b_1 \rangle$.

Minimaal zijn: $\langle a_1, b_2 \rangle$ en $\langle a_1, b_3 \rangle$.

- (d) De lexicografische ordening van $A \times B$ is niet totaal. Geef een voorbeeld van twee niet-vergelijkbare elementen in $A \times B$. Toelichting hoeft niet.

Herinner: twee elementen x, y in een partiëel geordende verzameling zijn vergelijkbaar wanneer $x \leq y$ of $y \leq x$. In het geval van de lexicografische ordening zijn er diverse voorbeelden te vinden van twee onvergelijkbare elementen: $\langle a_1, b_2 \rangle$ en $\langle a_1, b_3 \rangle$, $\langle a_2, b_2 \rangle$ en $\langle a_2, b_3 \rangle$, $\langle a_3, b_2 \rangle$ en $\langle a_3, b_3 \rangle$, $\langle a_2, b_1 \rangle$ en $\langle a_3, b_1 \rangle$, $\langle a_2, b_2 \rangle$ en $\langle a_3, b_3 \rangle$, $\langle a_2, b_3 \rangle$ en $\langle a_3, b_3 \rangle$.

3. Functies en equivalentierelaties. Laat W_3 de verzameling zijn van alle drie-letter woorden met letters uit het alfabet $A := \{ 'a', 'b', \dots, 'z' \}$. We noteren twee deelverzamelingen van de verzameling A :

$K := \{ 'a', 'e', 'i', 'o', 'u', 'y' \}$, (de zes klinkers), $M = A \setminus K$ (de twintig medeklinkers).

(We vatten hier de 'y' op als de zesde klinker.) Verder hebben we twee functies als volgt gedefiniëerd.

- $f: W_3 \rightarrow W_3$ kent aan een woord $w \in W_3$ het drie-letter woord toe dat ontstaat als je elke medeklinker in w vervangt door een 'x'. Bijvoorbeeld: $f("pap") = "xax"$.
- $g: W_3 \rightarrow W_3$ kent aan een woord $w \in W_3$ het drie-letter woord toe dat ontstaat als je elke klinker in w vervangt door een 'y'. Bijvoorbeeld: $g("aap") = "yyp"$.

- (a) Algemene kennis.

- (i) Wat bedoelt men met: een equivalentierelatie R in een verzameling V ?

Een equivalentierelatie R in een verzameling V is een (binair) relatie R in V met volgende drie eigenschappen.

Reflexiviteit: $\forall x \in V, x R x$.

Symmetrie: $\forall x, y \in V (x R y \rightarrow y R x)$.

Transitiviteit: $\forall x, y, z \in V (x R y \wedge y R z \rightarrow x R z)$.

Je antwoord mag ook in woorden geformuleerd zijn (dictaat, p. 46).

Reflexief: ieder element van V staat met zichzelf in relatie R .

Symmetrisch: telkens als een element van V in relatie R staat met een tweede element van V , staat dat tweede element in relatie R tot het eerste.

Transitief: telkens als een element van V in relatie R staat met een tweede element van V , en dat tweede element in relatie R staat tot een derde element van V , staat dat eerste element in relatie R tot het derde element.

- (ii) Gegeven een equivalentierelatie R in een verzameling V , wat bedoelt men met: de R -equivalentieklasse van een element $p \in V$?

De R -equivalentieklasse van $p \in V$ is de verzameling

$$[p]_R := \{x : x \in V, p R x\}.$$

In woorden: de R -equivalentieklasse van $p \in V$ is de verzameling van alle elementen uit V waarmee p in relatie R staat.

- (b) Laat zien dat f en g totale (getypeerde) functies zijn.

Elk drie-letter woord wordt door f en g geaccepteerd als invoer: de procedure verandert de aanwezige medeklinkers in 'x' (functief) en de aanwezige klinkers in 'y' (functie g).

- (c) Volgens de theorie ontstaat een equivalentierelatie (voor deze gelegenheid R_f genoemd) via het relatievoorschrift

$$w_1 R_f w_2 \text{ betekent } f(w_1) = f(w_2).$$

Hoeveel elementen zijn er in de equivalentieklasse ["wat"] en in de equivalentieklasse ["yep"]? Goede toelichting scoort.

De functie f zet alle medeklinkers om in 'x'. Twee woorden hebben dus dezelfde f -waarde als ze op dezelfde plaatsen een (mogelijk verschillende) medeklinker hebben en op dezelfde plaatsen dezelfde klinkers hebben.

In de equivalentieklasse van "wat" vind je alle woorden van de vorm (medeklinker)a(medeklinker). Zo vind je er $20 \cdot 20 = 400$.

Dus: $\#["wat"]_f = 400$.

In de equivalentieklasse van "yep" vind je alle woorden van de vorm ye(medeklinker). Zo vind je er 20. Dus: $\#["yep"]_f = 20$.

- (d) Nog steeds volgens de theorie ontstaat ook een equivalentierelatie (voor deze gelegenheid R_g genoemd) via het relatievoorschrift

$$w_1 R_g w_2 \text{ betekent } g(w_1) = g(w_2).$$

Hoeveel elementen zijn er ditmaal in de equivalentieklasse ["wat"] en in de equivalentieklasse ["yep"]? Goede toelichting scoort.

De functie g zet alle klinkers om in 'y'. Twee woorden hebben dus dezelfde g -waarde als ze op dezelfde plaatsen een (mogelijk

verschillende) klinker hebben en op dezelfde plaatsen dezelfde medeklinkers hebben.

In de equivalentieklasse van "wat" vind je alle woorden van de vorm $w(\text{klinker})t$. Zo vind je er 6. Dus: $\#["\text{wat}"]_g = 6$.

In de equivalentieklasse van "yep" vind je alle woorden van de vorm $(\text{klinker})(\text{klinker})p$. Zo vind je er $6 \cdot 6 = 36$. Dus: $\#["\text{yep}"]_g = 36$.

- (e) Volgens het recept van de onderdelen (c) en (d) kunnen we tenslotte een equivalentierelatie $R_{g \circ f}$ bouwen met het relatievoorschrift

$$w_1 R_{g \circ f} w_2 \text{ betekent } (g \circ f)(w_1) = (g \circ f)(w_2).$$

Hoeveel equivalentieklassen heeft $R_{g \circ f}$? Geef een volledig representantensysteem waaruit dit aantal blijkt. Goede toelichting scoort.

Twee woorden hebben dezelfde $(g \circ f)$ -waarde als ze op dezelfde plaatsen een klinker hebben en op dezelfde plaatsen een medeklinker hebben. Welke klinker of welke medeklinker doet niet terzake. Voor een volledig representantensysteem gebruiken we (bijvoorbeeld) woorden met alleen klinkers 'y' en alleen medeklinkers 'x'. Zo zijn er acht verschillende woorden:

"xxx", "xxy", "xyx", "yxx", "xyy", "yxy", "yyx", "yyy".

Elk drie-letter woord is met precies één van deze equivalent volgens $R_{g \circ f}$. Het aantal equivalentieklassen is dan ook 8.

4. Inductie en recursie.

- (a) Algemene kennis.

- (i) Formuleer de strategie van (gewone) natuurlijke inductie. Je mag het antwoord geven in de vorm van een strategietabel of in verbale vorm.

	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[<i>rekenregels</i>]	$\forall n \geq b, P(n)$
Werkargument 1:	[<i>rekenregels</i>]	$P(b)$
Werkargument 2:	[<i>rekenregels</i>], $n \geq b, P(n)$	$P(n+1)$

(Dictaat, p. 251). In woorden: Gegeven zijn de rekenregels in $\mathbb{Z}$. Om een zin van de vorm $\forall n \geq b P(n)$ aan te tonen, volstaat het om

(1e) $P(b)$ aan te tonen (basis van de inductie), en

(2e) onder aanname van $P(n)$ (inductiehypothese), $P(n+1)$ aan te tonen voor $n \geq b$.

Vaak is $b=0$ en dan betekent " $n \geq b$ " gewoon " $n \in \mathbb{N}$ ".

- (ii) Gegeven een (binaire) relatie R in een verzameling V , wat bedoelt men met: de transitieve afsluiting van R ?

Het is de vereniging van alle machten R^n van R ($n=1, 2, \dots$).

(Het resultaat is de kleinste mogelijke transitieve relatie waarin de relatie R bevat is als deelverzameling.)

- (b) Een rij reële getallen $(t_n)_{n=1}^{\infty} := \langle t_0, t_1, t_2, \dots \rangle$ is als volgt recursief gedefinieerd.

Normering:

1a	4	2a	4	3a	4	4a	4	MC	20
1b	3	2b	6	3b	3	4b	6		
1c	7	2c	4	3c	4	4c	7		
1d	3	2d	3	3d	4				
				3e	4				
17		17		19		17			20

Voor het multiple choice gedeelte geldt: -4 ptn per fout.

$$\textbf{Totaal} = 90; \quad \textbf{Cijfer} = \frac{\textit{Totaal}}{10} + 1.$$

☞ Dit cijfer kan nog worden verhoogd met ½ bonuspunt voor goed huiswerk.

$$t_0 := 1; \quad t_{n+1} := 3t_n - n + 1 \quad (n \geq 0).$$

(i) Bepaal $t_1, \dots, t_4$.

$$t_{n+1} = 3 \cdot t_n - n + 1 \text{ toepassen voor } n=0, 1, 2, 3:$$

$$n=0: t_1 x u' = 3 \cdot t_0 - 0 + 1 = 3 \cdot 1 - 0 + 1 = 4.$$

$$n=1: t_2 x u' = 3 \cdot t_1 - 1 + 1 = 3 \cdot 4 - 1 + 1 = 12.$$

$$n=2: t_3 x u' = 3 \cdot t_2 - 2 + 1 = 3 \cdot 12 - 2 + 1 = 35.$$

$$n=3: t_4 x u' = 3 \cdot t_3 - 3 + 1 = 3 \cdot 35 - 3 + 1 = 103.$$

(ii) Toon aan dat $t_n = (5/4) \cdot 3^n + (1/2) \cdot n - 1/4$ voor alle $n \geq 0$.

Basis $n=0$: $(5/4) \cdot 3^0 + (1/2) \cdot 0 - 1/4 = 5/4 - 1/4 = 1$: dit is precies t_0 .

Stap $n \mapsto n+1$: Zij $n \geq 0$ willekeurig en neem aan dat

$$t_n = (5/4) \cdot 3^n + (1/2) \cdot n - 1/4. \text{ Dan is}$$

$$t_{n+1} = 3 \cdot t_n - n + 1 \text{ (recursief voorschrift)}$$

$$= 3 \cdot ((5/4) \cdot 3^n + (1/2) \cdot n - 1/4) - n + 1 \text{ (inductie hyp.)}$$

$$= (5/4) \cdot 3^{n+1} + (3/2) \cdot n - 3/4 - n + 1$$

$$= (5/4) \cdot 3^{n+1} + (1/2) \cdot n + 1/4$$

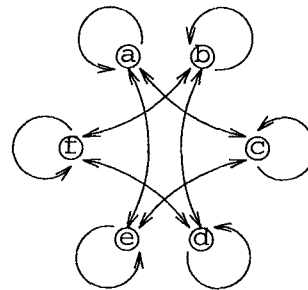
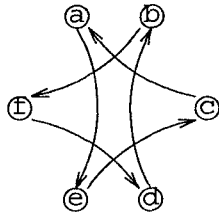
$$= (5/4) \cdot 3^{n+1} + (1/2) \cdot (n+1) - 1/2 + 1/4$$

$$= (5/4) \cdot 3^{n+1} + (1/2) \cdot (n+1) - 1/4.$$

(c) Teken in de rechterfiguur de transitieve afsluiting van de relatie, die in de linkerfiguur weergegeven is als een gerichte graaf. Goede toelichting scoort.

Merk op dat de transitieve afsluiting in dit geval een equivalentierelatie is.

Het procédé van transitieve afsluiting is: vorm achtereenvolgens $R, R^2, R^3, \dots$, en verenig al deze relaties. Het proces stabiliseert snel: R^3 is de relatie "Identiek", R^4 is dan weer R , en de cyclus herhaalt zich zonder nog iets nieuws te produceren. De transitieve afsluiting is van R is dus $R \cup R^2 \cup R^3$ (rechterfiguur).



Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

6.1. In wat volgt is x een variabele en c een constante. Het argument van al-introductie toepassen op de formule $P(x, c)$ levert:

- ☐ $\forall y P(x, y).$
- ☐ $\forall y P(y, c).$ ☒ JA
- ☐ $\forall y \forall z P(y, z).$
- ☐ $\forall y \exists z P(y, z).$

Opties 1 en 3: al-introductie mag niet worden uitgevoerd op een constante. Optie 4: hier is ook er-introductie toegepast.

6.2. Een stricte ordening $<$ in een verzameling V is antireflexief. Dit betekent:

- ☐ $\exists x \in V, \neg(x < x).$
- ☐ $\forall x \in V, \neg(x < x).$ ☒ JA
- ☐ $\forall x \in V \forall y \in V (x < y \rightarrow \neg y < x).$
- ☐ $\exists x \in V \exists y \in V \neg(x < y \wedge y < x).$

Optie 1 is waar, maar erg beperkt (vergelijk met optie 2). Optie 3 is op zich juist, maar drukt antisymmetrie uit. Optie 4 is een juiste maar erg beperkte uitspraak in de sfeer van antisymmetrie.

6.3. De binaire relatie $x R y$ in $\mathbb{Z}$ met voorschrift " 5 is een deler van $x - y$ " (of, zo je wil: $x - y$ is een vijfvoud) is:

- ☐ een orderrelatie in $\mathbb{Z}$.
- ☐ een stricte orderrelatie in $\mathbb{Z}$.
- ☐ een equivalentierelatie in $\mathbb{Z}$. ☒ JA
- ☐ -- (geen van deze).

Opties 1 en 2 zijn fout: het gaat wel degelijk om een equivalentierelatie. Optie 4 is dus ook fout.

6.4. Een functie $f: V \rightarrow W$ is 1-1 (injectief) als

- ☐ $\forall x \in V \forall y \in V (f(x) = f(y) \rightarrow x = y).$ ☒ JA
- ☐ $\forall x \in V \forall y_1 \in W \forall y_2 \in W (x f y_1 \wedge x f y_2 \rightarrow y_1 = y_2).$
- ☐ $\forall x \in V \exists y \in W x f y.$
- ☐ $\forall y \in W \exists x \in V x f y.$

Optie 2 drukt uit dat de functie "deterministisch" is; dat is altijd zo, maar dat is hier niet terzake. Optie 3 drukt uit dat de functie totaal is, en optie 4 drukt uit dat de functie surjectief is.

voor elk reëel getal $a \neq 0$ zijn gegeven vier functies van type $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: ADD_a , SUB_a , MUL_a , DIV_a , met voor de hand liggend functievoorschrift. De inverse functie van de samengestelde functie $MUL_3 \circ ADD_2$ is:

- o $ADD_2 \circ MUL_3$.
- o $DIV_3 \circ SUB_2$.
- o $SUB_2 \circ DIV_3$. ~~JA~~ JA
- o -- (de inverse is geen functie).

De inverse van de samenstelling is een functie (exit optie 4) die je krijgt door de inversen van de "onderdelen" (exit optie 1) in omgekeerde volgorde samen te stellen (exit optie 2).

6.6. Het ordeningsprincipe in $\mathbb{Z}$ stelt dat:

- o iedere niet-lege verzameling in $\mathbb{Z}$ een ondergrens heeft.
- o iedere niet-lege verzameling in $\mathbb{Z}$ een bovengrens heeft.
- o iedere niet-lege naar onder begrensde verzameling in $\mathbb{Z}$ een kleinste element heeft. ~~JA~~ JA
- o iedere niet-lege naar boven begrensde verzameling in $\mathbb{Z}$ een kleinste element heeft.

Het ordeningsprincipe gaat over ondergrenzen (exit optie 4) en garandeert dat een kleinste element bestaat (exit opties 1 en 2). De drie genoemde opties zijn sowieso foute uitspraken.