

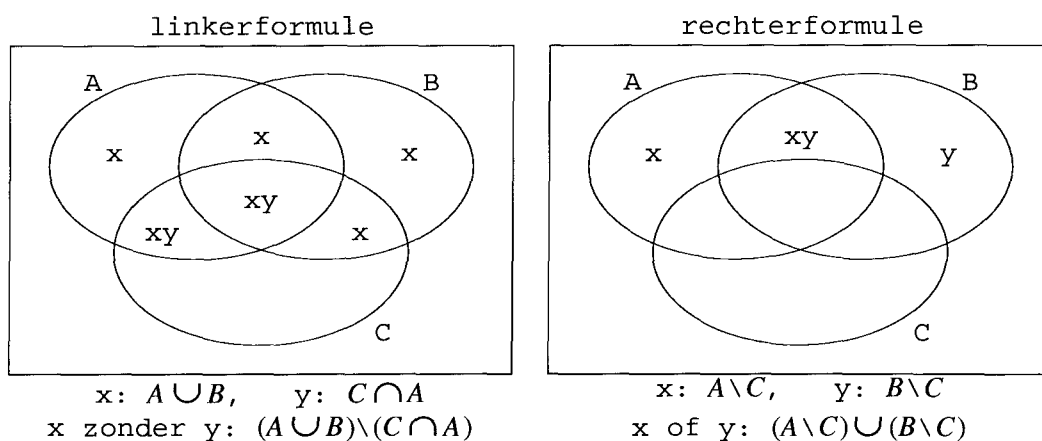
Opgelet: er is een apart multiple-choice gedeelte op de laatste pagina. Schrijf op dat blad je naam en lever het mee in met je overige tentamenkopij!



1. Verzamelingen

- (a) Maak een Venn-diagram voor elk van de twee opgegeven formules. Geef duidelijk aan welk gebied beschreven wordt door de formules. Zijn de twee beschreven verzamelingen gelijk?

$$(A \cup B) \setminus (C \cap A), \quad (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$



Dit geeft een verschillend gebied in beide figuren, dus zijn de formules ongelijke verzamelingen.

- (b) Vereenvoudig zover mogelijk met behulp van verzamelingenalgebra. Geef daarbij aan welke wetten je gebruikt. (De tabel met wetten staat achteraan het multiple-choice gedeelte.) Het universum is U .

$$(A' \cup (A \cap B'))'$$

[duale van opgave 1:H34(a)]

$$\begin{aligned}
 (A' \cup (A \cap B'))' &= (\text{De Morgan}) \\
 A'' \cap (A \cap B')' &= (\text{De Morgan}) \\
 A'' \cap (A' \cup B'') &= (\text{Involutie 2*}) \\
 A \cap (A' \cup B) &= (\text{distrib.}) \\
 (A \cap A') \cup (A \cap B) &= (\text{complement}) \\
 \emptyset \cup (A \cap B) &= (\text{identiteit}) \\
 A \cap B &
 \end{aligned}$$

Alternatieve berekening:

$$\begin{aligned}
 (A' \cup (A \cap B'))' &= (\text{distrib.}) \\
 ((A' \cup A) \cap (A' \cup B'))' &= (\text{complement}) \\
 (U \cap (A' \cup B'))' &= (\text{identiteit}) \\
 (A' \cup B')' &= (\text{De Morgan}) \\
 A'' \cap B'' &= (\text{Involutie 2*}) \\
 A \cap B &
 \end{aligned}$$

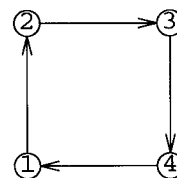
2. Relaties

We beschikken over volgende binaire relatie R in de verzameling $V := \{1, 2, 3, 4\}$:

$$R := \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 1 \rangle \}.$$

- (a) Geef de matrixvoorstelling van R (rij- en kolomnummers moeten overeenstemmen met de volgorde 1, 2, 3, 4 van de elementen van V).

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

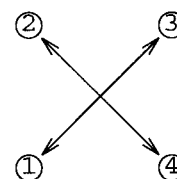


- (b) Geef de inverse relatie R^{-1} weer door opsomming.

$$R^{-1} = \{ \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle \}$$

- (c) Teken de gerichte graaf van de samengestelde relatie $S := R \circ R$.

R	R	$R \circ R$
$\langle 1, 2 \rangle$	$\langle 2, 3 \rangle$	$\langle 1, 3 \rangle$
$\langle 2, 3 \rangle$	$\langle 3, 4 \rangle$	$\langle 2, 4 \rangle$
$\langle 3, 4 \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle$
$\langle 4, 1 \rangle$	$\langle 1, 2 \rangle$	$\langle 4, 2 \rangle$



- (d) Is de relatie S reflexief? Symmetrisch? Antisymmetrisch? Transitief? Antwoord met met "ja" of "nee". Toelichting hoeft niet.

Reflexief: Nee. Nee, geen enkel element staat met zichzelf in relatie S (dat zou een lus geven in het grafenplaatje).

Symmetrisch: Ja.

Antisymmetrisch: Nee. 1 en 3 zijn verschillend en toch geldt $1S3$ en $3S1$.

Transitief: Nee. Je hebt $1S3$ en $3S1$, maar niet $1S1$.

3. Propositielogica: Taal en Waarheid

- (a) Ontbind volgende uitspraken in atomaire deeluitspraken, geef deze een naam, en geef daarmee de logische vorm van het geheel weer. Gebruik geen overbodige haakjes.

"Of je let op, of je raakt de draad kwijt en begrijpt het verhaal niet"

[Cf. Opgave 3:H37]

Vertaalsleutel:

$p :=$ "je let op"

$q :=$ "je raakt de draad kwijt"

$r :=$ "je begrijpt het verhaal"

Vertaling:

$$p \vee (q \wedge \neg r)$$

(b) Logische equivalentie.

- (i) Wat bedoelt men in de propositielogica met: twee uitspraken zijn logisch equivalent?

[Cf. Opgave 3:H30(a)] • Twee formules zijn logisch equivalent als ze dezelfde waarheidstabel hebben, anders gezegd: als ze in alle omstandigheden dezelfde waarheidswaarde hebben.

Ook goed zijn de antwoorden

- Twee formules zijn logisch equivalent als de eerste uit de tweede volgt door middel van een geldig argument, en omgekeerd.

- Twee formules zijn logisch equivalent als de eerste in de tweede kan worden omgezet door middel van een berekening in propositiealgebra, en omgekeerd.

- (ii) Controleer met een waarheidstabel of volgende twee proposities logisch equivalent zijn:

$$p \vee (q \rightarrow r), \quad (p \vee q) \rightarrow (p \vee r).$$

[Duale versie van opgave 3:H30(b)]

p	q	r	$p \vee (q \rightarrow r)$		$(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$		
0	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

De uitkomsten (boldface) zijn op elke regel gelijk. De formules zijn dus logisch equivalent.

- (iii) Zijn de haakjes overbodig in een van deze formules op grond van de prioriteitsregels?

Eerste formule: haakjes zijn nodig want 'v' heeft prioriteit op '→'. Anders staat er $(p \vee q) \rightarrow r$.

Tweede formule: haakjes zijn overbodig want 'v' heeft toch prioriteit op '→'.

4. Propositielogica: Argumentvorm en Redenering

- (a) Schakeling van standaard argumenten. Verifiëer volgend argument door aaneenschakelen van standaardargumenten. Geef daarbij de naam van de gebruikte argumenten (er is een tabelletje met namen achteraan dit tentamen).

$$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow s, \neg s, \therefore r$$

Premissen nummeren voor het gemak:

$$(1) p \vee q, (2) p \rightarrow r, (3) q \rightarrow s, (4) \neg s$$

premissen:	tussenconclusie:	gebruikte regel:
3,4	(5) $\neg q$	Modus Tollens
1,5	(6) p	Disjunctief syllogisme
2,6	$\therefore r$	Modus Ponens

(b) Strategie en Bewijs.

(i) Geef een strategie om volgende "Invoerregel" te controleren:

$$p \rightarrow (q \rightarrow r), \therefore p \wedge q \rightarrow r.$$

	Premissen:	Doel:
Beginargument	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$p \wedge q \rightarrow r$
Aanpassing	$p \rightarrow (q \rightarrow r), p \wedge q$	r
Werkargument	$p \rightarrow (q \rightarrow r), p, q$	r

De eerste strategie is $\rightarrow$ introductie, gevolgd door $\wedge$ -eliminatie.

(ii) Je strategie bevat een werkargument.

Controleer nu dit argument door aaneenschakelen van standaardargumenten.

Premissen nummeren voor het gemak:

(1) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$, (2) p , (3) q

premissen:	tussenconclusie:	gebruikte regel:
1,2	(4) $q \rightarrow r$	Modus Ponens
4,3	$\therefore r$	Modus Ponens

N.B.: De strategie van "Aanpassing" naar "Werkargument" in deel (a) komt neer op het voorwaards toepassen van de regel van conjunctieve simplificatie. Je kan dus ook de "Aanpassing" als "Werkargument" nemen, en het bewijs in deel (b) beginnen met conjunctieve simplificatie.

Predicatenlogica: Taal en Waarheid

(a) Vertaal met de aangereikte vertaalsleutel in een universum van personen.

"Al wie vrienden heeft, is niet eenzaam"

Vertaalsleutel:

$Vxy := x$ heeft y tot vriend

$Ex := x$ is eenzaam

- De kernzin is:

als [x heeft vrienden] dan [x is niet eenzaam]

- Kwantor plaatsen:

[voor alle personen x geldt]

als [x heeft vrienden] dan [x is niet eenzaam]

- De deelzin " x heeft vrienden" betekent:

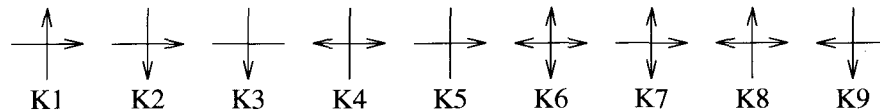
[voor sommige personen y geldt] [x heeft vriend y].

- Invullen:

als [voor sommige personen y geldt] [x heeft vriend y]
dan [x is niet eenzaam]

- Dit moet zo zijn voor alle x .
[voor alle personen x geldt]
als [voor sommige personen y geldt] [x heeft vriend y]
dan [x is niet eenzaam]
 - Vertaalsleutel gebruiken:
[voor alle personen x geldt]
([voor sommige personen y geldt] $\forall xy$) $\rightarrow \neg Ex$
 - Kwantoren inbrengen:
 $\forall x ((\exists y \forall xy) \rightarrow \neg Ex)$
- resultaat: (overbodige haakjes weggewerkt)
 $\forall x (\exists y \forall xy \rightarrow \neg Ex)$

- (b) Situatie-logica. Gegeven is een universum van kruisen waarvan sommige armen een pijlpunt hebben en andere niet. Laat Bx , Ox , Lx , Rx respectievelijk uitdrukken dat x een pijl naar boven, onder, links, rechts, heeft.



- (i) Geef de waarheidsverzameling van de open zin $\neg Bx \wedge \neg Ox$

De interpretatie is: een kruis heeft géén pijl naar boven en géén pijl naar onder. De kruisen $k4$ en $k5$ hebben geen pijl naar boven en geen pijl naar onder, de overige kruisen hebben in tenminste een van de genoemde richtingen een pijl. Dus is de waarheidsverzameling $\{k4, k5\}$.

- (ii) Geef de interpretatie in vlot en correct nederlands: $\forall x (Lx \rightarrow \neg Bx \wedge \neg Ox)$.

Voor alle kruisen geldt: als er een pijl naar links is, dan is er geen pijl naar boven en geen pijl naar onder. Ieder kruis met een pijl naar links heeft geen pijl naar boven en geen pijl naar onder.

- (iii) Geef aan met "ja" of met "nec" of volgende gesloten zinnen waar zijn in dit universum. Toelichting hoeft niet.

(α) $\exists x (Bx \wedge Ox \wedge Lx \wedge Rx)$.

Ja, $k6$ is zo'n x .

(β) $\forall x (Lx \vee Rx)$.

Nee, $x=k3$ voldoet niet.

(γ) $\forall x (Lx \wedge Rx \rightarrow Bx \vee Ox)$.

Nee, $x=k4$ voldoet niet.

Normering.

1a	6	2a	3	3a	6	4a	6	5a	4	MC	20
1b	6	2b	3	3b	10	4b	7	5b	12		
		2c	3								
		2d	4								
	12		13		16		13		16		20

Voor het multiple choice gedeelte geldt: -4 ptn per fout.

Totaal = 90; **Cijfer** = $\frac{Totaal}{10} + 1$.

⚠ Dit cijfer kan nog worden verhoogd met ½ bonuspunt voor goed huiswerk.

⚠ Voor dit tentamen heb je twee uur de tijd.

Commutativiteit:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Associativiteit:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

Distributiviteit:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Identiteiten:

$$A \cup U = U \text{ en } A \cup \emptyset = A;$$

$$A \cap U = A \text{ en } A \cap \emptyset = \emptyset$$

Idempotentie:

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

Complementen:

$$A \cup A' = U$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

DeMorgan's wetten:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Involutie:

$$(A')' = A$$

Tabel: Enkele standaard argumentvormen

naam	argumentvorm	evt. variant	alternatieve naam
Modus Ponens	$p \rightarrow q, p$ $\therefore q$		$\rightarrow$ eliminatie regel
Modus Tollens	$p \rightarrow q, \neg q$ $\therefore \neg p$		
Disjunctieve toevoeging	q $\therefore p \vee q$	p $\therefore p \vee q$	$\vee$ introductie regel
Conjunctieve toevoeging	p, q $\therefore p \wedge q$		$\wedge$ -introductie regel
Conjunctieve simplificatie	$p \wedge q$ $\therefore q$	$p \wedge q$ $\therefore p$	$\wedge$ eliminatie regel
Disjunctief syllogisme	$p \vee q, \neg q$ $\therefore p$	$p \vee q, \neg p$ $\therefore q$	
Dilemma regel	$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r$ $\therefore r$		$\vee$ eliminatie regel
Contradictieregel	$p \rightarrow \perp$ $\therefore \neg p$		$\neg$ introductie regel
Ketenregel	$p \rightarrow q, q \rightarrow r$ $\therefore p \rightarrow r$		hypothetisch syllogisme

Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

6.1. A en B zijn verzamelingen. De formule $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ staat voor:

- ☐ Het universum.
- ☐ Het complement van de vereniging van A en B .
- ☐ Het symmetrisch verschil van A en B . ☒ JA
- ☐ De doorsnede van het complement van A met het complement van B .

Toelichting: Het onderdeel $A \setminus B$ van de formule staat voor het relatieve complement van B in A : het deel van A buiten B . De andere helft van de formule is $B \setminus A$: het deel van B buiten A .

6.2. Een binaire (tweeplaatsige) relatie is:

- ☐ een relatie tussen "bits" 0, 1.
- ☐ een uitspraak over twee elementen.
- ☐ een relatie R met de eigenschap dat uit $x R y$ steeds $y R x$ volgt.
- ☐ een verzameling van paren. ☒ JA

6.3. Iemand produceert volgende twee evaluaties van de formule $p \wedge \neg q \rightarrow r$:

nr.	p	q	r	$p \wedge \neg q$	$\rightarrow$	r
1.	1	0	0		0	
2.	1	1	0		1	

- ☐ Beide evaluaties zijn fout.
- ☐ De eerste evaluatie is fout, de tweede is juist.
- ☐ De eerste evaluatie is juist, de tweede is fout.
- ☐ Beide evaluaties zijn juist. ☒ JA

Toelichting: bekijk de uitgebreide weergave van deze twee regels:

nr.	p	q	r	$p \wedge \neg q$	$\rightarrow$	r
1.	1	0	0	1	0	0
2.	1	1	0	0	1	0

Op regel 1 is de hypothese $p \wedge \neg q$ waar, maar de conclusie r niet. Die implicatie is dan onwaar. Op regel 2 is de hypothese $p \wedge \neg q$ onwaar. Die implicatie is dan waar (ongeacht wat r doet).

6.4. De negatie van de formule $p \vee \neg q$ is logisch equivalent met de formule

- ☐ $p \vee q$
- ☐ $p \wedge q$
- ☐ $\neg p \vee q$
- ☐ $\neg p \wedge q$ ☒ JA

Toelichting: $\neg (p \vee \neg q) \equiv \neg p \wedge \neg \neg q \equiv \neg p \wedge q$ volgens de wetten

6.5. In wat volgt stellen $F, F_1, F_2, \dots$ propositiologische formules voor in een schakeling van argumentvormen.

argumentnr.	premissen	(tussen)conclusie
(Arg.1)	F_1, F_2	$\therefore F_3$
(Arg.2)	F_1, F_3, F_4	$\therefore F_5$
(Arg.3)	F_5, F_6	$\therefore F$

Welk argument van de vorm " $F_1, F_2, \dots \therefore F$ " geeft een correct en optimaal resultaat weer van de aangegeven schakeling? N.B.: Met "optimaal" wordt hier bedoeld dat je naast F_1 en F_2 zo min mogelijk premissen gebruikt.

- o $F_1, F_2, F_3, \therefore F$.
- o $F_1, F_2, F_4, \therefore F$.
- o $F_1, F_2, F_6, \therefore F$.
- o $F_1, F_2, F_4, F_6, \therefore F$. ☞ JA

Toelichting: Met F_1, F_2 krijg je F_3 , dus antwoord 1 is zeker niet optimaal. Om F te krijgen heb je F_5 en F_6 nodig. Formule F_5 kun je in alleen krijgen met (Arg.2) uit de tabel. Daarvoor is (o.a.) F_4 nodig, en die kun je nergens krijgen. Die moet je dus van bij het begin hebben en antwoord 3 valt af. Formule F_6 Kun je in geen van de (Arg.1/2/3) krijgen. Dus antwoord 2 valt af. Bij antwoord 4 zie je snel dat je achtereenvolgens krijgt: F_3 , dan F_5 , en (met F_6 in je bezit) tenslotte F .

6.6. Welke logische vorm komt in aanmerking als vertaling van volgende zin:

"Sommige leeuwen eten zebra's".

- o $\exists x (Lx \wedge \exists y (Zy \wedge E(x,y)))$. ☞ JA
- o $\exists x (Lx \wedge \forall y (Zy \rightarrow E(x,y)))$.
- o $\forall x (Lx \rightarrow \exists y (Zy \wedge E(x,y)))$.
- o $\forall x \forall y (Lx \wedge Zy \rightarrow E(x,y))$.

Toelichting: Modelopgave 5:H20(c). Met de zinswending ".. eten zebra's" wordt normaal gesproken niet bedoeld: ".. eten ALLE zebra's" maar wel ".. eten SOMMIGE zebra's".

De interpretatie van antwoord 2 zegt: "Sommige leeuwen eten elk dier dat een zebra is".

De interpretatie van antwoord 3 zegt: "Iedere leeuw eet (sommige) zebra's".

De interpretatie van antwoord 4 zegt: "Iedere leeuw eet iedere zebra".

Deze zinnen hebben duidelijk een andere betekenis dan de gegeven zin.