



Faculteit Exacte Wetenschappen

Logische Taal en Redeneermethoden

Vrije Universiteit Amsterdam

Herkansings Tentamen 28-04-03

1. Verzamelingen en relaties.

- (a) Algemene kennis.
- (i) Wat zijn de verschillen tussen een verzameling en een lijst?
 - (ii) Geef de twee distributieve wetten in verzamelingen algebra.
 - (iii) Geef de twee wetten van DeMorgan (over complementen) in verzamelingen algebra.
- (b) Maak een Venn-diagram voor elk van de twee opgegeven formules. Geef duidelijk aan welk gebied beschreven wordt door de formules. Zijn de twee verzamelingen gelijk?

$$A \cap (B \cup C)', \quad (A \cap B') \cap (A \cap C).$$

- (c) Controleer met de wetten van de verzamelingen algebra:

$$(A \cap B)' \cap (A \cap C)' = A' \cup (B \cup C)'.$$

- (d) We beschikken over de verzamelingen $Dagnummers := \{01, 02, \dots, 31\}$ en $Maandnummers := \{01, 02, \dots, 12\}$. De verzameling $Data$ is de deelverzameling van

$$Dagnummers \times Maandnummers$$

die bestaat uit alle werkelijk voorkomende data in 2003. Bekijk nu de relatie

$$KorteTermijn := \{ \langle d_1, d_2 \rangle : d_1 \in Data, d_2 \in Data, d_1 \leq d_2, d_2 - d_1 \leq 15 \text{ dagen} \}.$$

Voorbeeld:

$$\langle 27-01, 05-02 \rangle \in KorteTermijn, \quad \langle 27-01, 16-02 \rangle \notin KorteTermijn.$$

Beantwoord nu volgende vragen enkel met ja of met nee:

- (i) Is de relatie reflexief?
- (ii) Is de relatie symmetrisch?
- (iii) Is de relatie antisymmetrisch?
- (iv) Is de relatie transitief?

2. Propositiel logica

- (a) Algemene kennis:
- (i) In een formule treden 5 atomaire proposities op. Hoeveel regels bevat de (body van de) volledige waarheidstabel?
 - (ii) Wat bedoelt men precies met "een geldige argumentvorm"?
 - (iii) Wat is de strategie van implicatie-introductie? Geef een precies antwoord, liefst in de vorm van een tabelletje.

Voor de rest van deze opgave bekijken we de volgende argumentvorm:

$$p \rightarrow (q \wedge r)$$

$$\therefore (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$$

- (b) Controleer de argumentvorm op geldigheid door middel van een waarheidstabel.
- (c) Geef een combinatiestrategie (met o.m. en-introductie en implicatie-introductie) om deze regel te controleren.
- (d) Geef nu bij elk werkargument uit (c) een geschakeld argument om het werkargument te bewijzen.

3. Predicatenlogica

- (a) Algemene kennis:
- (i) Wat bedoelt men met een beperkte kwantor (in tegenstelling tot een gewone (al- of er-) kwantor)?
 - (ii) Een van volgende formules over logische equivalentie is correct, de ander is fout. Geef aan welke goed is en welke fout:

$$\exists x (Ax \wedge Bx) \equiv \exists x Ax \wedge \exists x Bx; \quad \exists x (Ax \vee Bx) \equiv \exists x Ax \vee \exists x Bx.$$
 - (iii) De predicatenlogica voegt aan de propositielogica nog enkele nieuwe strategieën toe. Beschrijf er één van. Geef ook de naam ervan.
- (b) Vertaal de volgende zin met behulp van de aangegeven vertaalsleutels.

"Ieder persoon die elke redenering kan begrijpen, is een natuurtaent of heeft logica gevolgd."

Px := "x is een persoon".
 Rx := "x is een redenering".
 Bxy := "x kan y begrijpen".
 Nx := "x is een natuurtaent".
 Lx := "x heeft logica gevolgd".

Suggestie: geef geen "alles-of-niets" antwoord, maar bouw je vertaling op met enkele tussenstappen.

- (c) Werk de ontkenning van volgende uitspraak zover mogelijk uit, en zet de gevonden formule vervolgens om in goed Nederlands met behulp van de aangegeven sleutels.
- $$\forall x (Dx \rightarrow \exists y (Sy \wedge \neg Vyx))$$
 Dx := "x is een docent".
 Sx := "x is een student".
 Vxy := "x haalt voldoende bij y".
- (d) Gegeven is de volgende evaluatie van het binaire predicaat V uit onderdeel (c). Het symbool '+' geeft een voldoende aan.

student\docent	d_1	d_2	d_3	d_4
anja	+	-	+	+
bart	+	+	+	+
carl	-	+	+	-
dirk	+	+	-	+

- (i) Is de *gegeven* uitspraak uit (c) (*niet* de ontkenning) hier waar of onwaar?
- (ii) Geef de waarheidsverzameling bij de open zin

$$Sx \wedge \forall y (Dy \rightarrow Vxy).$$

Antwoorden volstaan in onderdeel (d).

4. Ordening

- (a) Algemene kennis:
- (i) Aan welke voorwaarden moet een partiële ordening voldoen? De namen van deze voorwaarden volstaan.
 - (ii) Wat bedoelt men met "een Hasse diagram van een partiële geordende verzameling"?
- (b) Gegeven is een verzameling V met deelverzameling A , een partiële ordening $\leq$ in V , en een element p van V . Geef in symbolische vorm de definitie van volgende noties:

- (i) p is het grootste element van A ;
- (ii) p is een maximaal element van A .
- (c) Neem nu voor V de verzameling $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ met de Cartesische ordening (uitgaande van de natuurlijke ordening op $\mathbb{Z}$), en voor A de deelverzameling
$$\{ \langle x, y \rangle : 1 \leq x, 1 \leq y, 3 \leq x + y \leq 5 \}.$$
Teken een Hasse diagram met de elementen van A .
- (d) (vervolg onderdeel (c)). Heeft A een grootste element? Zo ja, geef dit element; zo niet, geef alle maximale elementen van A .
- (e) (vervolg onderdelen (c) en (d)). Heeft A een kleinste element? Zo ja, geef dit element; zo niet, geef alle minimale elementen van A .

5. Functies

- (a) Algemene kennis:
 - (i) Wat onderscheidt een functie van een (binaire) relatie?
 - (ii) Wat bedoelt men met een injectieve (1-1) functie $f : A \rightarrow B$?
 - (iii) Wat bedoelt men met een surjectieve functie $f : A \rightarrow B$?
- (b) In dit onderdeel gebruiken we de verzameling $A := \{ 'a', 'b', 'c', \dots, 'z' \}$ van alle kleine letters. Zij W_{2+} de verzameling van alle woorden met tenminste 2 letters uit A en zij W_2 de verzameling van alle woorden met precies 2 letters uit A . We hebben een functie $\text{kap} : W_{2+} \rightarrow W_2$, die een woord van lengte ≥ 2 afkapt na de tweede letter.

Voorbeeld: $\text{kap}(\text{"jantje"}) = \text{"ja"}$.

Verder hebben we een functie $\text{volgnr} : W_2 \rightarrow \{1, 2, \dots, 1000\}$, waarbij $\text{volgnr}(x)$ het volgnummer van x is in de lexicografisch gesorteerde lijst van elementen van W_2 tot een maximum van 1000.

Voorbeeld: $\text{volgnr}(\text{"af"}) = 6$, $\text{volgnr}(\text{"ba"}) = 27$.

- (i) Geef een (summiere) beschrijving van het proces bij de functie $\text{volgnr} \circ \text{kap}$.
- (ii) Laat zien dat de samengestelde functie $\text{volgnr} \circ \text{kap}$ totaal is.
- (iii) Is de functie $\text{volgnr} \circ \text{kap}$ surjectief? Licht je antwoord toe.
- (c) In dit onderdeel is $A := \{ 'a', 'b', 'c', 'd', 'e' \}$. Laat $V := A \times A$ en bepaal de functie $\text{waarde} : V \rightarrow \{1, 2, \dots, 10\}$ als volgt. Gegeven $x \in V$ is $\text{waarde}(x)$ de som van de letterwaarden, waarbij $'a': 1, 'b': 2, 'c': 3, 'd': 4, 'e': 5$. Zij R de equivalentierelatie met voorschrift $xRy \leftrightarrow^{\text{def}} \text{waarde}(x) = \text{waarde}(y)$.
 - (i) Geef een beschrijving van het relatievoorschrift in woorden.
 - (ii) Beschrijf de equivalentieklassen van "aa" en van "ac" door opsomming.
 - (iii) Hoeveel verschillende equivalentieklassen heeft de relatie R ?

6. Inductie en Recursie

- (a) Algemene kennis:
 - (i) Zij R een relatie in een eindige verzameling A . Wat bedoelt men met "een weergave van R in matrixvorm"?
 - (ii) Het (gewone) principe van inductie is een strategie bij het werken met gehele getallen. De premissen van het beginargument vormen een standaard lijst van wetten in $\mathbb{Z}$. Hoe ziet het doel van dit beginargument eruit, en hoe ziet(n) het (de) werkargument(en) eruit?
 - (iii) Wat bedoelt men met "de transitieve afsluiting van een relatie"?

(b) Een rij reële getallen $(t_n)_{n=2}^{\infty}$ is als volgt recursief gedefiniëerd.

$$t_2 := 4; \quad t_{n+1} := t_n + 2n + 2 \quad (n \geq 2).$$

(i) Bereken de eerste vijf termen van de rij $(t_n)_{n=2}^{\infty}$.

(ii) Bewijs met inductie dat $t_n = n^2 + n - 2$ voor alle $n \geq 2$.

(c) Gegeven is een verzameling A met 4 punten en een binaire relatie R in A (in matrixvorm):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Geef de transitieve afsluiting van R weer in matrixvorm. Suggestie: om met R te werken mag je eender welke manier van voorstellen gebruiken. Het resultaat moet wel in matrixvorm worden weergegeven.

Normering:

1a	3	2a	3	3a	3	4a	2	5a	3	6a	3	M	16
1b	3	2b	4	3b	3	4b	3	5b	4	6b	4		
1c	3	2c	3	3c	4	4c	3	5c	4	6c	4		
1d	3	2d	3	3d	3	4d	3						
						4e	3						
12		13		13		14		11		11		16	

(Multiple-choice gedeelte: -3punten per fout)

Totaal = 90

Cijfer = Totaal/10 + 1

naam, studierichting & jaar:

28-04-03

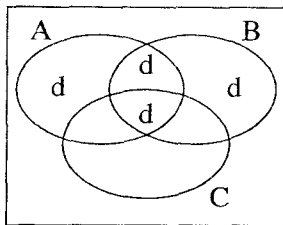
Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

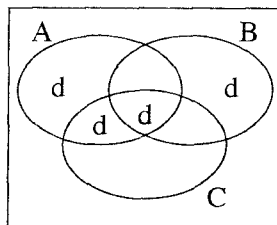
M1. Gegeven zijn een element d en drie verzamelingen A, B, C in een universum, waarbij

$$d \in (A \cap B') \cup (B \cap C').$$

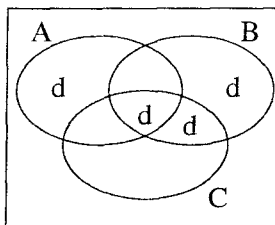
In een Venn-diagram met A, B, C plaatsen we een 'd' in elk vlakdeel waar het element d volgens de formule toe kan behoren. Welke van volgende vier Venn-diagrammen geeft de situatie correct weer.



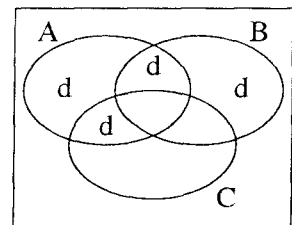
Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4

- ☐ Figuur 1.
- ☐ Figuur 2.
- ☐ Figuur 3.
- ☐ Figuur 4.

M2. De persoonsrelatie *IsKleinZoonVan* kan best worden weergegeven als

- ☐ De samenstelling *IsZoonVan* ◦ *IsDochterVan*.
- ☐ De samenstelling *IsDochterVan* ◦ *IsZoonVan*.
- ☐ De vereniging van de samengestelde relaties *IsDochterVan* ◦ *IsZoonVan* en *IsZoonVan* ◦ *IsZoonVan*.
- ☐ De vereniging van de samengestelde relaties *IsZoonVan* ◦ *IsDochterVan* en *IsZoonVan* ◦ *IsZoonVan*.

M3. Welke van de volgende vier waarheidstabellen evalueert de formule $p \vee q \rightarrow \neg q$ juist:

p	q	$p \vee q \rightarrow \neg q$	$p \vee q \rightarrow \neg q$	$p \vee q \rightarrow \neg q$	$p \vee q \rightarrow \neg q$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
		Tabel 1	Tabel 2	Tabel 3	Tabel 4

- ☐ Tabel 1.
- ☐ Tabel 2.
- ☐ Tabel 3.
- ☐ Tabel 4.

M4. Welke commentaar op volgend argument is meest terzake:

- Iedereen heeft soms last van stress. $\therefore$ Er zijn tijden waarop iedereen last heeft van stress.
- ☐ De argumentvorm is een standaard argument over omwisselen van kwantoren; i.h.b. is het

- een geldig argument.
- o De argumentvorm is een schakeling van vier standaard argumenten: al- en er-eliminatie, gevolgd door er- en al-(her)introductie, i.h.b. is het een geldig argument.
 - o Dit argument is niet geldig. Het aaneenschakelen van al- en er-eliminatie, gevolgd door er- en al-(her)introductie, is niet correct uitgevoerd.
 - o Dit argument is niet geldig want er is een interpretatie mogelijk met ware premissen en onware conclusie.

M5. Zij $f: V \rightarrow W$ een totale functie. De binaire relatie xRy in V met voorschrift " $fx = fy$ " is:

- o een (totale) orderrelatie in V .
- o een stricte orderrelatie in V .
- o een equivalentierelatie in V .
- o -- (geen van deze).

M6. Voor elk reëel getal $a \neq 0$ zijn vier functies van type $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven: ADD_a , SUB_a , MUL_a , DIV_a , met voor de hand liggend functievoorschrift. De formule voor de samengestelde functie $DIV_3 \circ SUB_2 \circ MUL_4(x)$ is

- o $(4x - 2)/3$.
- o $4x/3 - 2$.
- o $4(x/3 - 2)$.
- o -- (geen van deze formules is correct).