

Opgelet: er is een apart multiple-choice gedeelte op de laatste pagina. Schrijf op dat blad je naam en lever het mee in met je overige tentamenkopij!

1. Strategie en bewijs. Zij R een symmetrische en transitieve relatie in een verzameling V . We willen met deze premissen aantonen dat

$$\forall x \in V (\exists y \in V xRy \rightarrow xRx).$$

Let op de haakjes.

(a) Geef voor het bedoelde argument een (combinatie)strategie die begint met

	premissen	doel
Beginargument	(1) R symmetrisch in V , (2) R transitief in V ,	$\forall x \in V (\exists y \in V xRy \rightarrow xRx)$

Oplossing:

We combineren $\forall$ introductie met $\rightarrow$ introductie:

	premissen	doel
Beginargument	(1) R symmetrisch in V , (2) R transitief in V ,	$\forall x \in V (\exists y \in V, xRy \rightarrow xRx)$
($\forall$ introductie)	(1), (2), $x \in V$	$\exists y \in V, xRy \rightarrow xRx$
($\rightarrow$ introductie) = Werkargument	(1), (2), (3): $x \in V$, (4): $\exists y \in V, xRy$	xRx

(b) Geef een schakeling van standaard argumenten om het (de) werkargument(en) van deze strategie te controleren.

premissen(n)	volgnr	tussenconclusie	gebruikt argument
(4)	(5)	$c \in V \wedge xRc$	$\exists$ eliminatie
(5)	(6)	xRc	$\wedge$ eliminatie
(1)	(7)	$xRc \rightarrow cRx$	$\forall$ eliminatie
(6), (7)	(8)	cRx	Modus Ponens
(2)	(9)	$xRc \wedge cRx \rightarrow xRx$	$\forall$ eliminatie
(6), (8)	(10)	$xRc \wedge cRx$	$\wedge$ introductie
(9), (10)	$\therefore$	xRx	Modus ponens

Op de eerste regel stelt c een nieuwe werknaam voor.

(c) Geef een verbaal bewijs op basis van de aangegeven strategie en de aangegeven schakelingen.

Zij $x \in V$ willekeurig en neem aan dat een element $c \in V$ bestaat met xRc . Dan (1:symmetrie) geldt ook cRx . Maar uit xRc en cRx volgt (2:transitiviteit) dat xRx , Q.E.D.

2. Partiële ordening. In deze opgave werken we met de verzameling

$$Del30 := \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

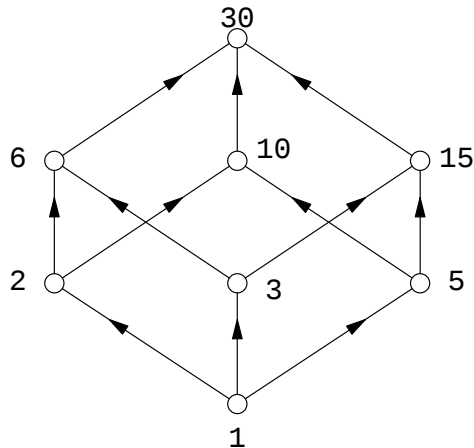
(de verzameling van alle delers van 30), en met de relatie *Deelt* in *Del30* met voorschrift " x is een

delers van y ". Deze relatie is, zoals bekend, een partiële ordening (je hoeft dit niet aan te tonen).

- (a) Wat bedoelt men met het *Hasse diagram* van een partiële ordening?

Losjes geformuleerd: Een Hasse diagram is de weergave van een orderrelatie als een gerichte graaf met minimale informatie. Meer bepaald: alle lussen worden weggelaten en elke pijl die ontstaat uit het aaneenschakelen van twee pijlen wordt weggelaten.

- (b) Geef de relatie *Deelt* weer door middel van een Hasse diagram.



Merk op dat dit diagram identiek is aan het Hasse diagram van de machtsverzameling van $\{0,1\}$: het is de graaf van een drie-dimensionale kubus.

Zie diktaat p. 167.

Figuur: Hasse diagram van Del_{30}

- (c) Neem nu de deelverzameling $A := \{2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ van $Del(30)$. Heeft A een kleinste element volgens de orderrelatie *Deelt*? Zo ja, geef dit element; zo niet, geef alle minimale elementen.

Er is geen kleinste element in A , maar er zijn wel minimale elementen volgens de orderrelatie *Deelt*: 2, 3, 5.

- (d) Heeft de verzameling A een grootste element volgens de orderrelatie *Deelt*? Zo ja, geef dit element; zo niet, geef alle maximale elementen.

Er is een grootste element in A voor de orderrelatie *Deelt*, namelijk 30.

3. Equivalentierelaties. In wat volgt is W de verzameling $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ en V de verzameling $W \times W$. We beschikken over de volgende equivalentierelaties in W (je hoeft dit niet aan te tonen):

$$R_1 := \{ \langle x, y \rangle : x - y \text{ is een veelvoud van } 2 \},$$

$$R_2 := \{ \langle x, y \rangle : x - y \text{ is een veelvoud van } 3 \}.$$

- (a) Geef alle equivalentieklassen van R_1 en van R_2 .

R_1 heeft twee equivalentieklassen: $\{1, 3, 5\}$ en $\{2, 4, 6\}$.

R_2 heeft drie equivalentieklassen: $\{1, 4\}$, $\{2, 5\}$, en $\{3, 6\}$.

- (b) Geef een volledig representantensysteem voor R_1 en voor R_2 .

We nemen uit elke klasse het eerst opgesomde element:

Volledig representantensysteem voor R_1 : $\{1, 2\}$.

Volledig representantensysteem voor R_2 : $\{1, 2, 3\}$.

- (c) In V construeren we een relatie R als volgt.

$$\langle x_1, x_2 \rangle R \langle y_1, y_2 \rangle \stackrel{\text{def}}{=} x_1 R_1 y_1 \wedge x_2 R_2 y_2.$$

Toon aan dat R een equivalentierelatie is in W .

In dit antwoord zijn $x := \langle x_1, x_2 \rangle$, $y := \langle y_1, y_2 \rangle$, en $z := \langle z_1, z_2 \rangle$ willekeurige elementen van V .

reflexief: Er geldt: $x_1 R_1 x_1$ want R_1 is reflexief en $x_2 R_2 x_2$ want R_2 is reflexief. Zodoende is xRx (definitie R).

symmetrisch: Neem aan dat xRy . Bijgevolg is $x_1 R_1 y_1$ en $x_2 R_2 y_2$ (definitie R). Dan is ook $y_1 R_1 x_1$ en $y_2 R_2 x_2$ omdat R_1 en R_2 symmetrisch zijn. Zodoende is yRx (definitie R).

transitief. Neem aan dat $xRyRz$. Bijgevolg geldt $x_1 R_1 y_1 R_1 z_1$ en $x_2 R_2 y_2 R_2 z_2$ (definitie R). Dan is ook $x_1 R_1 z_1$ en $x_2 R_2 z_2$ omdat R_1 en R_2 transitief zijn. Zodoende is xRz (definitie R).

- (d) (Vervolg onderdeel (c)) Beschrijf de R -equivalentieklasse van $\langle 1, 1 \rangle$ door opsomming. (Antwoord volstaat.)

$[\langle 1, 1 \rangle] = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 5, 1 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 5, 4 \rangle \}$ (6 stuks). Merk op dat dit het Cartesisch product is van de R_1 equivalentieklasse $\{1, 3, 5\}$ van 1 met de R_2 equivalentieklasse $\{1, 4\}$ van 1.

- (e) (Vervolg onderdeel (c)) Geef een volledig representantensysteem voor de equivalentierelatie R . (Antwoord volstaat.)

$\{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle \}$ (6 stuks). Merk op dat dit het Cartesisch product is van een volledig R_1 representantensysteem $\{1, 2\}$ van 1 met een volledig R_2 representantensysteem $\{1, 2, 3\}$ van 1.

4. Functies

- (a) We beschikken over volgende twee functies f, g in tabelvorm:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	6	1	7	3	2

x	1	2	3	4	5
$g(x)$	2	5	1	3	2

- (i) Geef de tabellen voor de samengestelde functies $f \circ g$ en $g \circ f$.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	6	1	7	3	2
$g(f(x))$	-	2	-	1	5

de functie g NA f

x	1	2	3	4	5
$g(x)$	2	5	1	3	2
$f(g(x))$	1	2	6	7	1

de functie f NA g

- (ii) Wat is het definitiegebied van de functies $f \circ g$ en $g \circ f$?

Het definitiegebied van de functie $f \circ g$ is $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Het definitiegebied van de functie $g \circ f$ is $\{2, 4, 5\}$.

- (iii) Welke van de functies f, g zijn 1-1? Welke hebben een inverse functie? Geef in voorkomend geval de tabel van de inverse functie.

De functie f is 1-1. De functie g is niet 1-1 want bij invoer van 1 en van 5 ontstaat dezelfde waarde, 2.

De functie f heeft een inverse, g niet. De tabel voor f^{-1} is:

y	6	1	7	3	2
$f^{-1}(x)$	1	2	3	4	5

- (b) Zij $V := \{0, 1, \dots, 9\}$ de verzameling van alle cijfers en zij $h: V \rightarrow V$ de functie gegeven door volgende tabel.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h(x)	1	2	4	2	4	6	8	6	8	1

De functie h is totaal en, zoals bekend, leidt een totale functie tot een equivalentierelatie (zeg: R) in het domein. Het voorschrift voor xRy is: $h(x) = h(y)$.

- (i) Wat bedoelt men met "de functie h is totaal"?
- Het definitiegebied van de functie h is het hele domein V van h . Anders gezegd: ieder element van het domein V is een effectieve input van de functie h .
- (ii) Geef de R -equivalentieklasse $[0]$ van 0 en $[1]$ van 1 door opsomming.
 $[0] = \{0, 9\}$ en $[1] = \{1, 3\}$.
- (iii) Hoeveel verschillende equivalentieklassen heeft R ? (Goede toelichting scoort.)
 Elke effectieve waarde van h leidt tot één equivalentieklasse. De effectieve waarden zijn: 1, 2, 4, 6, 8.
 Zodoende zijn er precies 5 verschillende equivalentieklassen.

5. Inductie en recursie. We bekijken een rekenkundige rij met beginterm a en verschil d . De rij begint dus met $a, a + d, a + 2d, \dots$. De som van de eerste n termen van deze rij noemen we S_n .

Bijvoorbeeld: $S_1 = a$, $S_2 = a + (a + d) = 2a + d$,
 $S_3 = a + (a + d) + (a + 2d) = 3a + 3d$.

Zodoende: $S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + (n - 1)d) = \sum_{k=0}^{n-1} a + kd$.

- (a) Neem als beginterm $a = 1$ en als verschil $d = 2$. Bereken S_4 en S_5 .
 De reeks begint met 1, 3, 5, 7, 9.
 Dus: $S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$ en $S_5 = S_4 + 9 = 25$.
- (b) Toon aan met inductie naar $n \geq 1$ dat

$$S_n = n \cdot a + \frac{1}{2}n \cdot (n - 1) \cdot d.$$

Basis $n=1$: $S_1 = a = 1 \cdot a + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1 - 1) \cdot d$.

Stap n naar $n+1$: Zij $n \geq 1$ willekeurig en neem aan dat de formule geldt voor n . We moeten aantonen dat $S_{n+1} = (n+1)a + \frac{1}{2}(n+1)nd$.
 Welnu: $S_{n+1} = S_n + a + nd = na + \frac{1}{2}n(n-1)d + a + nd = (n+1)a + \frac{1}{2}(n+1)nd$.

Normering:

1a	6	2a	3	3a	3	4a	7	5a	6	M	15
1b	6	2b	4	3b	4	4b	8	5b	9		
1c	3	2c	4	3c	4						
		2d	4	3d	2						
				3e	2						
15		15		15		15		15		15	

(de M-kolom staat voor het multiple-choice gedeelte)

$$\text{Cijfer} = \text{Totaal}/10 + 1$$

Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

M1. Welke kommentaar op volgend argument is meest terzake:

Sommige mensen zijn nooit tevreden. $\therefore$ Niemand is ooit tevreden.

- ☐ De argumentvorm is een standaard argument over negatie van de al-kwantor; i.h.b. is het een geldig argument.
- ☐ De argumentvorm is een standaard argument over negatie van de er-kwantor; i.h.b. is het een geldig argument.
- ☐ Dit argument is niet geldig want er zijn onvoldoende premissen aanwezig om het argument aan te tonen.
- ☐ Dit argument is niet geldig want er is een interpretatie mogelijk met ware premissen en onware conclusie. **Opl.: JA**

M2. Een minimaal element p van een verzameling A in een verzameling V met partiële ordening $\leq$ moet voldoen aan:

- ☐ $p \in A$ en $\forall a \in A, \neg a \leq p$.
- ☐ $p \in A$ en $\forall a \in A (a \leq p \rightarrow p = a)$. **Opl.: JA**
- ☐ $p \in A$ en $\forall a \in A, p \leq a$.
- ☐ $p \in A$ en $\forall a \in A, p < a$.

M3. In een verzameling V bestaat een "totale" relatie R , gedefiniëerd door $R := V \times V$. We gaan ervan uit dat $\#V \geq 2$. De relatie R is

- ☐ zowel een equivalentierelatie als een orderrelatie.
- ☐ een equivalentierelatie maar geen orderrelatie. **Opl.: JA**
- ☐ geen equivalentierelatie maar wel een orderrelatie.
- ☐ geen equivalentierelatie en geen orderrelatie.

Toelichting: De verzameling V heeft volgens aanname ten minste twee elementen. Twee verschillende elementen a en b van V voldoen nu aan: aRb en bRa , maar niet aan $a=b$. De relatie is dus niet antisymmetrisch, en bijgevolg ook geen partiële ordening.

M4. Voor elk reëel getal $a \neq 0$ zijn gegeven vier functies van type $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: ADD_a , SUB_a , MUL_a , DIV_a , met voor de hand liggend functievoorschrift. De inverse functie van de samengestelde functie $DIV_4 \circ ADD_2$ is:

- ☐ $ADD_2 \circ MUL_4$.
- ☐ $SUB_2 \circ MUL_4$. **Opl.: JA**
- ☐ $DIV_4 \circ SUB_2$.
- ☐ $SUB_2 \circ DIV_4$.

M5. Het recursieve voorschrift voor de rij getallen $1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots$ is:

- ☐ $a_0 := 1$ en $a_{n+1} := -a_n \cdot (n+1)/n$.
- ☐ $a_0 := 1$ en $a_{n+1} := -a_n \cdot (n+2)/(n+1)$. **Opl.: JA**
- ☐ $a_0 := 1$ en $a_{n+1} := -a_n + 1$.
- ☐ $a_0 := 1$ en $a_{n+1} := -a_n - 1$.