

Opgelet: er is een apart multiple-choice gedeelte op de laatste pagina. Schrijf op dat blad je naam en lever het mee in met je overige tentamenkopij!

1. Strategie en bewijs. Zij R een symmetrische en transitieve relatie in een verzameling V . We willen met deze premissen aantonen dat

$$\forall x \in V (\exists y \in V xRy \rightarrow xRx).$$

Let op de haakjes.

(a) Geef voor het bedoelde argument een (combinatie)strategie die begint met

	premissen	doel
Beginargument	(1) R symmetrisch in V , (2) R transitief in V ,	$\forall x \in V (\exists y \in V xRy \rightarrow xRx)$

- (b) Geef een schakeling van standaard argumenten om het (de) werkargument(en) van deze strategie te controleren.
- (c) Geef een verbaal bewijs op basis van de aangegeven strategie en de aangegeven schakelingen.

2. Partiële ordening. In deze opgave werken we met de verzameling

$$Del\ 30 := \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

(de verzameling van alle delers van 30), en met de relatie *Deelt* in *Del* 30 met voorschrift " x is een deler van y ". Deze relatie is, zoals bekend, een partiële ordening (je hoeft dit niet aan te tonen).

- (a) Wat bedoelt men met het *Hasse diagram* van een partiële ordening?
- (b) Geef de relatie *Deelt* weer door middel van een Hasse diagram.
- (c) Neem nu de deelverzameling $A := \{2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ van *Del* (30). Heeft A een kleinste element volgens de orderrelatie *Deelt*? Zo ja, geef dit element; zo niet, geef alle minimale elementen.
- (d) Heeft de verzameling A een grootste element volgens de orderrelatie *Deelt*? Zo ja, geef dit element; zo niet, geef alle maximale elementen.

3. Equivalentierelaties. In wat volgt is W de verzameling $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ en V de verzameling $W \times W$. We beschikken over de volgende equivalentierelaties in W (je hoeft dit niet aan te tonen):

$$R_1 := \{ \langle x, y \rangle : x-y \text{ is een veelvoud van } 2 \},$$

$$R_2 := \{ \langle x, y \rangle : x-y \text{ is een veelvoud van } 3 \}.$$

- (a) Geef alle equivalentieklassen van R_1 en van R_2 .
- (b) Geef een volledig representantensysteem voor R_1 en voor R_2 .
- (c) In V construeren we een relatie R als volgt.

$$\stackrel{\text{def}}{\langle x_1, x_2 \rangle R \langle y_1, y_2 \rangle} \Leftrightarrow x_1 R_1 y_1 \wedge x_2 R_2 y_2.$$

Toon aan dat R een equivalentierelatie is in W .

- (d) (Vervolg onderdeel (c)) Beschrijf de R -equivalentieklasse van $\langle 1, 1 \rangle$ door opsomming. (Antwoord volstaat.)
- (e) (Vervolg onderdeel (c)) Geef een volledig representantensysteem voor de equivalentierelatie R . (Antwoord volstaat.)

4. Functies

(a) We beschikken over volgende twee functies f, g in tabelvorm:

x	1	2	3	4	5	x	1	2	3	4	5
f(x)	6	1	7	3	2	g(x)	2	5	1	3	2

- (i) Geef de tabellen voor de samengestelde functies $f \circ g$ en $g \circ f$.
- (ii) Wat is het definitiegebied van de functies $f \circ g$ en $g \circ f$?
- (iii) Welke van de functies f, g zijn 1-1? Welke hebben een inverse functie? Geef in voorkomend geval de tabel van de inverse functie.

(b) Zij $V := \{0, 1, \dots, 9\}$ de verzameling van alle cijfers en zij $h : V \rightarrow V$ de functie gegeven door volgende tabel.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h(x)	1	2	4	2	4	6	8	6	8	1

De functie h is totaal en, zoals bekend, leidt een totale functie tot een equivalentierelatie (zeg: R) in het domein. Het voorschrift voor xRy is: $h(x) = h(y)$.

- (i) Wat bedoelt men met "de functie h is totaal"?
- (ii) Geef de R -equivalentieklasse $[0]$ van 0 en $[1]$ van 1 door opsomming.
- (iii) Hoeveel verschillende equivalentieklassen heeft R ? (Goede toelichting scoort.)

5. Inductie en recursie. We bekijken een rekenkundige rij met beginterm a en verschil d . De rij begint dus met $a, a + d, a + 2d, \dots$. De som van de eerste n termen van deze rij noemen we S_n .

Bijvoorbeeld: $S_1 = a, S_2 = a + (a + d) = 2a + d,$
 $S_3 = a + (a + d) + (a + 2d) = 3a + 3d.$

Zodoende: $S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + (n-1)d) = \sum_{k=0}^{n-1} a + kd.$

- (a) Neem als beginterm $a = 1$ en als verschil $d = 2$. Bereken S_4 en S_5 .
- (b) Toon aan met inductie naar $n \geq 1$ dat

$$S_n = n \cdot a + \frac{1}{2}n \cdot (n-1) \cdot d.$$

Normering:

1a	6	2a	3	3a	3	4a	7	5a	6	M	15
1b	6	2b	4	3b	4	4b	8	5b	9		
1c	3	2c	4	3c	4						
		2d	4	3d	2						
				3e	2						
	15		15		15		15		15		15

(de M-kolom staat voor het multiple-choice gedeelte)

Cijfer = Totaal/10 + 1

Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

M1. Welke commentaar op volgend argument is meest terzake:

Sommige mensen zijn nooit tevreden. $\therefore$ Niemand is ooit tevreden.

- o De argumentvorm is een standaard argument over negatie van de al-kwantor; i.h.b. is het een geldig argument.
- o De argumentvorm is een standaard argument over negatie van de er-kwantor; i.h.b. is het een geldig argument.
- o Dit argument is niet geldig want er zijn onvoldoende premissen aanwezig om het argument aan te tonen.
- o Dit argument is niet geldig want er is een interpretatie mogelijk met ware premissen en onware conclusie.

M2. Een minimaal element p van een verzameling A in een verzameling V met partiële ordening $\leq$ moet voldoen aan:

- o $p \in A$ en $\forall a \in A, \neg a \leq p$.
- o $p \in A$ en $\forall a \in A (a \leq p \rightarrow p = a)$.
- o $p \in A$ en $\forall a \in A, p \leq a$.
- o $p \in A$ en $\forall a \in A, p < a$.

M3. In een verzameling V bestaat een "totale" relatie R , gedefiniëerd door $R := V \times V$. We gaan ervan uit dat $\#V \geq 2$. De relatie R is

- o zowel een equivalentierelatie als een orderrelatie.
- o een equivalentierelatie maar geen orderrelatie.
- o geen equivalentierelatie maar wel een orderrelatie.
- o geen equivalentierelatie en geen orderrelatie.

M4. Voor elk reëel getal $a \neq 0$ zijn gegeven vier functies van type $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: ADD_a , SUB_a , MUL_a , DIV_a , met voor de hand liggend functievoorschrift. De inverse functie van de samengestelde functie $DIV_4 \circ ADD_2$ is:

- o $ADD_2 \circ MUL_4$.
- o $SUB_2 \circ MUL_4$.
- o $DIV_4 \circ SUB_2$.
- o $SUB_2 \circ DIV_4$.

M5. Het recursieve voorschrift voor de rij getallen $1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots$ is:

- o $a_0 := 1$ en $a_{n+1} := -a_n \cdot (n+1)/n$.
- o $a_0 := 1$ en $a_{n+1} := -a_n \cdot (n+2)/(n+1)$.
- o $a_0 := 1$ en $a_{n+1} := -a_n + 1$.
- o $a_0 := 1$ en $a_{n+1} := -a_n - 1$.