

Onderwerp: Verzamelingen en Relaties

1. Venn-diagrammen en aantallen. Gegeven zijn drie verzamelingen A, B, C met (respectievelijk) 7, 8, 9 elementen in een universum U met 20 elementen. Verder is gegeven dat

$$\#(A \cap B \cap C) = 1,$$

$$\#(A \cap B) = \#(B \cap C) = \#(C \cap A) = 3.$$

Bepaal volgende aantallen met behulp van Venn-diagrammen:

- (a) $\#(A \cup B \cup C)$.
- (b) $\#(A' \cap B' \cap C')$.
- (c) $\#(U \setminus (A \cup B))$.



2. Samengestelde en inverse relaties. (Het multiple choice blad bevat de aanzet voor enkele Venn diagrammen.) We beschikken over de verzamelingen

$$\text{Weekdagen} := \{ma, di, wo, do, vr, za, zo\},$$

$$\text{Weekenddagen} := \{za, zo\},$$

$$\text{Werkdagen} := \text{Weekdagen} \setminus \text{Weekenddagen}.$$

Voer in: de binaire relatie *VolgendeWerkdag* gegeven door opsomming:

$$\{ \langle ma, di \rangle, \langle di, wo \rangle, \langle wo, do \rangle, \langle do, vr \rangle, \langle vr, ma \rangle, \langle za, ma \rangle, \langle zo, ma \rangle \}.$$

- (a) Stel de relatie R voor door middel van Venn-diagrammen en door middel van een 0/1 matrix.
- (b) De relatie R is niet reflexief, niet symmetrisch, niet antisymmetrisch, en niet transitief. Geef telkens aan wat er schort.
- (c) Voer in: de binaire relatie $S := \text{Eergisteren}$, gegeven door de verzameling $\{ \langle ma, za \rangle, \langle di, zo \rangle, \langle wo, ma \rangle, \langle do, di \rangle, \langle vr, wo \rangle, \langle za, do \rangle, \langle zo, vr \rangle \}$.
Teken de inverse relatie S^{-1} van S met behulp van Venn-diagrammen.
- (d) Zoek een paar dagen $\langle x, y \rangle$ in de relatie $R \circ S$ maar niet in de relatie $S \circ R$.

Onderwerp: Propositie- en Predicatenlogica

3. Vertalen en waarheidstabellen. We geven twee propositielogische argumenten. Geef in beide gevallen een *vertaalsleutel* en een *vertaling* volgens de sleutel. Ga tenslotte na met behulp van waarheidstabellen welke van de argumenten *geldig* zijn.

- (a) Als het dag is en het niet bewolkt is, dan is het zonnig. $\therefore$ Als het dag is, dan is het bewolkt of zonnig.

- (b) Als het niet regent, gaan we op stap. Regent het en waait het, dan gaan we niet op stap. Het regent maar het waait niet. $\therefore$ We gaan niet op stap.

4. Schakelen in predicaatlogica. Bewijs door de aangegeven argumentvormen aaneen te schakelen.

- (a) $\exists x (Q_1 x \vee Q_2 x), \forall x (Q_1 x \rightarrow Px), \forall x (Q_2 x \rightarrow Px), \therefore \exists x Px$
(er-eliminatie regel, al-eliminatie regel, of-eliminatie regel, er-introductie regel).
- (b) $\forall x (Px \rightarrow Qx), \exists x \neg Qx, \therefore \exists x \neg Px$
(er-eliminatie, al-eliminatie, Modus Tollens, er-introductie).

5. We bekijken het volgende argument (universum van dieren).

- (1) Alle dieren die kunnen vliegen hebben vleugels.
(2) Alle dieren die geen poten hebben, hebben geen vleugels.
($\therefore$) $\therefore$ Als er dieren zijn die geen poten hebben, dan zijn er dieren die niet kunnen vliegen.

- (a) Geef, met vertaalsleutel, de logische vorm van vorig argument. Je mag de onderliggende woorden als sleutel nemen. Gebruik onbeperkte kwantoren,
(b) Geef een strategie op basis van $\rightarrow$ introductie en $\exists$ eliminatie om te verifiëren dat dit argument correct is.
(c) Geef nu een bewijs volgens je strategie uit (b). Je mag dit bewijs geven in woorden of in een tabelvormig schema.

Onderwerp: Orderrelaties, Functies en Equivalentierelaties

6. Cartesische ordening

- (a) Zij R een relatie in een verzameling V . Wat bedoelt men met: R is antisymmetrisch? Geef dit weer in de taal van de predicaatlogica.
- (b) Gegeven zijn twee partiële ordeningen, $\leq_1$ in V_1 en $\leq_2$ in V_2 . Vervolledig het volgende voorschrift voor de Cartesische ordening $\leq$ op de productverzameling $V := V_1 \times V_2$.

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 (< x_1, x_2 > \leq < y_1, y_2 > \Leftrightarrow x_1 \leq y_1 \wedge x_2 \leq y_2)$$
- (c) Zij $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ voorzien van de standaard ordening en neem nu de Cartesische ordening in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Geef bij de verzameling

$$A := \{ < x, y > : x, y \in \mathbb{N}, 3 \leq x + y \leq 6 \}$$

 in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ alle minimale elementen. Is er een kleinste element in A ?

7. Functies en Equivalentierelaties. Neem de verzameling $V := \{0, 1, 2, \dots, 99\}$ en de functie $f: V \rightarrow \text{Cijfers}$ met voorschrift

$f(x)$ is de som van de cijfers van het getal x . Indien de som van de cijfers een getal ≥ 10 is, neem dan van dit getal opnieuw de som van de cijfers.

N.B. $\text{Cijfers} := \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$.

Voorbeeld: berekening van $f(94)$:

$9+4 = 13$, $1+3 = 4$, dus $f(94) = 4$.

Zij R de equivalentierelatie in V die hoort bij f .

- (a) Controleer of de functie f al dan niet injectief/surjectief is.
- (b) Geef elk van de equivalentieklassen $[0]$, $[1]$, $[2]$ van R weer door opsomming.
- (c) Hoeveel verschillende equivalentieklassen heeft R ?
- (d) Geef een volledig representantensysteem voor R .

Onderwerp: Inductie en recursie

8. Rijen.

- (a) Een rij reële getallen $(t_n)_{n=2}^\infty$ is als volgt recursief gedefiniëerd.

$$t_2 := 4; \quad t_{n+1} := t_n + 2n + 2 \quad (n \geq 2).$$

Bepaal de eerste vijf termen van de rij $(t_n)_{n=2}^\infty$.

- (b) (Vervolg onderdeel (a)). Bewijs met inductie dat $t_n = n^2 + n - 2$ voor alle $n \geq 2$.

9. Transitieve afsluiting. Gegeven is een verzameling A met 5 punten en een binaire relatie R in A (in matrixvorm):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Geef de matrix van de transitieve afsluiting van R . Suggestie: maak de voorstelling via Venn-diagrammen.

Normering:

1a	3	2a	2	3a	5	4a	5	5a	2	6a	2	7a	2	8a	2	9	6	M	12
b	3	b	2	b	5	b	5	b	4	b	2	b	2	8b	4				
c	3	c	2					c	4	c	4	c	3						
		d	3									d	3						
9		9		10		10		10		8		10		6		6		12	

Cijfer = Totaal/9 + 1 Multiple choice: -2ptn per fout antwoord.

Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

M.1. Een partitie van een verzameling V is

- ☐ een relatie in een collectie niet-lege deelverzamelingen van V .
- ☐ een collectie niet-lege deelverzamelingen van V die onderling disjunct zijn.
- ☐ een collectie niet-lege deelverzamelingen van V zo dat ieder element van V tot precies één van die delen behoort.
- ☐ een collectie niet-lege deelverzamelingen van V waarvan de vereniging heel V is.

M.2. De persoonsrelatie *IsGrootmoederVan* wordt weergegeven als

- ☐ de inverse relatie van *IsGrootvaderVan*.
- ☐ de samenstelling *IsVaderVan* $\circ$ *IsMoederVan*.
- ☐ de samenstelling *IsMoederVan* $\circ$ *IsVaderVan*.
- ☐ de vereniging van de samengestelde relaties *IsVaderVan* $\circ$ *IsMoederVan* en *IsMoederVan* $\circ$ *IsMoederVan*.

M.3. Een contradictie in de propositielogica is een formule

- ☐ die onwaar is terwijl de atomaire onderdelen waar zijn.
- ☐ die altijd onwaar is ongeacht de waarheid van de atomaire onderdelen.
- ☐ die de logische vorm van een slecht geformuleerde uitspraak weergeeft.
- ☐ van de gedaante $p \rightarrow \neg p$.

M.4. De formule $\forall x(Px \vee Qx)$ is logisch equivalent met:

- ☐ $\forall xPx \vee \forall xQx$.
- ☐ $\forall xPx \wedge \forall xQx$.
- ☐ $\forall x(\neg Px \rightarrow Qx)$.
- ☐ -- (geen van deze).

M.5. Een maximaal element p van een verzameling A in een verzameling V met partiële ordening $\leq$ moet voldoen aan:

- ☐ $p \in A$ en $\forall a \in A \neg p \leq a$.
- ☐ $p \in A$ en $\forall a \in A (p \leq a \rightarrow p = a)$.
- ☐ $p \in A$ en $\forall a \in A (a \leq p)$.
- ☐ $p \in A$ en $\forall a \in A (a < p)$.

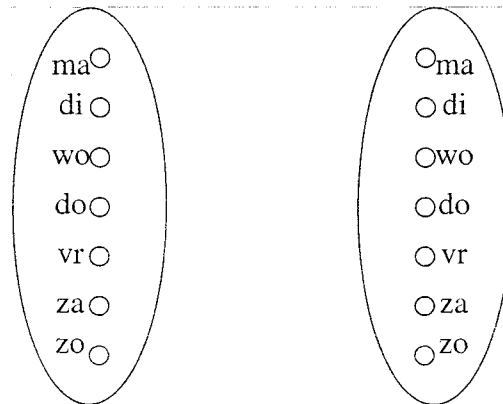
M.6. Zij R een equivalentierelatie in een verzameling V . Een volledig representantensysteem van R is

- o een deelverzameling van V met uit elke R -equivalentieklasse één element.
- o Een verzameling van representanten waarbij elke R -equivalentieklasse vertegenwoordigd is.
- o een partitie van V horend bij de equivalentieklassen van R .
- o een opdeling van V in twee deelverzamelingen: een klasse die bestaat uit elementen in relatie met p en een klasse die bestaat uit met elementen niet in relatie met p .

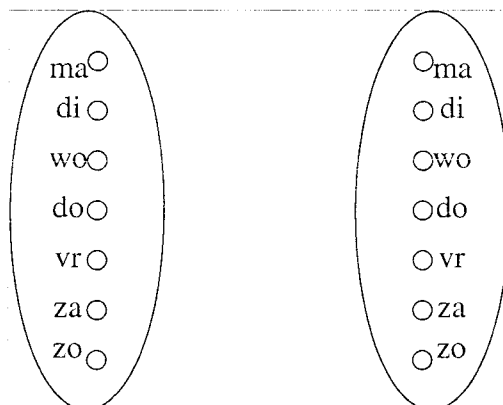
M.7. Het recursieve voorschrift voor $n!$ (n -faculteit, $n \geq 1$) is:

- o $1! := 1$ en $n! := (n+1)! \cdot n$.
- o $1! := 1$ en $(n+1)! := n! \cdot n$.
- o $1! := 1$ en $(n+1)! := n! \cdot (n+1)$.
- o $1! := 1$ en $(n+1)! := n! + (n+1)$.

Venn-diagrammen ten behoeve van opgave 2.



deel(a): relatie R



deel(c): inverse relatie van S