

**Opgelet:** er is een apart multiple-choice gedeelte op de laatste bladzijde (vraag 5). Schrijf op dat blad je naam en lever het mee in met je overige tentamenkopij!

# 1. Argumentvorm en strategie. Gegeven is het volgende argument.

Er zijn ogenblikken waarop het sneeuwt of de hemel stralend blauw is.

Telkens als het sneeuwt, heb ik een prettig gevoel.

Telkens als de hemel stralend blauw is, heb ik een prettig gevoel.

$\therefore$  Soms heb ik een prettig gevoel.

- (a) Geef, met vertaalsleutel, de argumentvorm van dit argument.

vertaalsleutel:

$S(t) :=$  "het sneeuwt op ogenblik  $t$ "

$B(t) :=$  "de hemel is stralend blauw op ogenblik  $t$ "

$P(t) :=$  "ik heb een prettig gevoel op ogenblik  $t$ "

vertaling:

$\exists t (St \vee Bt),$

$\forall t (St \rightarrow Pt),$

$\forall t (Bt \rightarrow Pt),$

$\therefore \exists t Pt.$

- (b) Geef een bruikbare strategie om de geldigheid van het argument uit (a) te controleren. Aanwijzing: probeer een combinatie van "er eliminatie" en "al eliminatie".

Nummer de premissen (1)-(3) zoals opgesomd.

|                  | premissen                                              | doel           |
|------------------|--------------------------------------------------------|----------------|
| begin            | (1) - (3)                                              | $\exists t Pt$ |
| $\exists$ elim   | (2, 3), (1') $Sc \vee Bc$                              | $\exists t Pt$ |
| $2*\forall$ elim | (1'), (2') $Sc \rightarrow Pc, (3') Bc \rightarrow Pc$ | $\exists t Pt$ |

Op de tweede regel stelt  $c$  een nieuwe constante voor.

Deze is op de derde regel verder gebruikt. De laatste regel is het (enige) werkargument.

- (c) De strategie uit (b) heeft het gegeven argument omgezet in één of meer werkargumenten. Controleer deze door een schakeling van standaardargumenten.

Het werkargument is een schakeling van het standaardargument genaamd "Dilemma regel" (= "of-eliminatie regel") met het standaardargument genaamd "er-introductie regel":

| premissen(n) | volgnr       | tussenconclusie | gebruikt standaardargument |
|--------------|--------------|-----------------|----------------------------|
| (1' - 3')    | (4)          | $Pc$            | of-eliminatie regel        |
| (4)          | $\therefore$ | $\exists t Pt$  | er-introductie regel       |

- (d) (Dit onderdeel staat los van de vorige onderdelen.) Laat zien door het geven van een interpretatie dat de argumentvorm

$$\begin{aligned} & \forall x(Q_1x \vee Q_2x), \\ & \therefore \forall xQ_1x \vee \forall xQ_2x \end{aligned}$$

ongeldig is.

Interpretatie:  $Q_1(x) := "x \text{ is oneven}"$   $Q_2(x) := "x \text{ is even}"$  in het universum van natuurlijke getallen. Het blijkt dat de premisse correct is (getallen zijn oneven of even) maar de conclusie is fout: niet alle getallen zijn even, niet alle getallen zijn oneven.

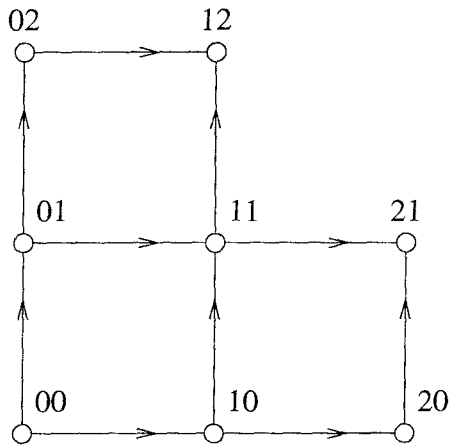
## 2. Orderrelaties. Gegeven is de verzameling $\mathbb{N}^2$ met de Cartesische ordening

$$\stackrel{\text{def}}{< x_1, x_2 > \leq < y_1, y_2 >} \Leftrightarrow x_1 \leq y_1 \text{ en } x_2 \leq y_2$$

en een deelverzameling  $A \subseteq \mathbb{N}^2$ , gegeven door

$$A := \{ <0,0>, <0,1>, <1,0>, <1,1>, <1,2>, <2,1>, <0,2>, <2,0> \}.$$

(a) Teken het Hasse diagram van de verzameling A.



De afkorting "00" staat voor  $<0,0>$ , etc. Punten zijn geplaatst in overeenstemming met hun coördinaten.

- (b) Welke elementen zijn maximaal, resp. grootste, van A?  
 $<1,2>$  en  $<2,1>$  zijn maximaal; er is geen grootste in A.
- (c) Welke elementen zijn minimaal, resp. kleinste, van A?  
 $<0,0>$  is kleinste van A (en dus ook minimaal).
- (d) Wat bedoelt men met een bovengrens  $p$  van een verzameling A in een partiëel geordende verzameling? Geef in de huidige situatie een bovengrens van A in  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .  
 Een bovengrens  $p$  van A is een element  $p \in V$  zó dat  $\forall a \in A$   $a \leq p$ .  
 In de huidige situatie is  $<2,2>$  een bovengrens van A (het is "de meest krappe").

**3. Functies.** Gegeven zijn de functies  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  en  $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , met als respectievelijk functievoorschrift:

$$f(x) = x^2; \quad g(x) = x/2; \quad h(x) = x - 5.$$

- (a) Wat bedoelt men met definitiegebied en waardengebied van een functie?  
Geef vervolgens het definitiegebied en waardengebied van de functies  $f$ ,  $g$  en  $h$ . Let op de typering van de functies!

Het definitiegebied  $D_f$  van een functie  $f$  is de verzameling van alle acceptabele invoer voor de functie  $f$ , d.w.z., invoer waarop uitvoer wordt geproduceerd.

Het waardengebied  $W_f$  van een functie  $f$  is de verzameling van alle geproduceerde uitvoer van  $f$ .

Hier:

$$D_f = \mathbb{N}$$

$$W_f = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\} = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ is een kwadraat}\}$$

$$D_g = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\} = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ is even}\}$$

$$W_g = \mathbb{N}$$

$$D_h = \{5, 6, 7, 8, \dots\} = \{x : x \in \mathbb{N}, x \geq 5\}$$

$$W_h = \mathbb{N}$$

- (b) Vul volgende tabel in met de juiste waarde, indien er een waarde is. Schrijf anders een '-' op die plaats.

| $x =$               | 3 | 4 | 6  | 7  | 9  |
|---------------------|---|---|----|----|----|
| $f \circ g \circ h$ | - | - | -  | 1  | 4  |
| $h \circ g \circ f$ | - | 3 | 13 | -  | -  |
| $g \circ h \circ f$ | 2 | - | -  | 22 | 38 |

(Deze tabel is overgenomen op de achterzijde van het multiple choice formulier.)

- (c) Welke van  $f$ ,  $g$ , en  $h$ , zijn totale functies en welke niet? Toelichting hoeft niet.  
 $f$  is totaal,  $g$  en  $h$  niet (definitiegebied niet gelijk aan domein; zie deel (a))

- (d) Geef voor  $f$ ,  $g$ , en  $h$ , aan of de inverse relatie een functie is, (zo ja) wat hier het functievoorschrift van is en of die inverse een totale functie is.

De functie  $f$  heeft een inverse functie, nl. wortel.  
Deze is niet totaal (definitiegebied = kwadraten)

De functie  $g$  heeft een inverse functie, nl. verdubbelen.  
Deze is totaal (definitiegebied = heel  $\mathbb{N}$ )

De functie  $h$  heeft een inverse functie, nl. vijf bijtellen.  
Deze is totaal (definitiegebied = heel  $\mathbb{N}$ )

## 4. Inductie en recursie

- (a) Een rij reële getallen  $(t_n)_{n=0}^\infty := \langle t_0, t_1, t_2, \dots \rangle$  is als volgt recursief gedefinieerd.

$$t_0 := 1; \quad t_{n+1} := 5t_n + 4n - 1 \quad (n \geq 0).$$

Bepaal  $t_1, \dots, t_4$ .

$$t_{n+1} = 5 \cdot t_n + 4n - 1$$

$$n=0: t_1 = 5 \cdot t_0 + 4 \cdot 0 - 1 = 4$$

$$n=1: t_2 = 5 \cdot t_1 + 4 \cdot 1 - 1 = 23$$

$$n=2: t_3 = 5 \cdot t_2 + 4 \cdot 2 - 1 = 122$$

$$n=3: t_4 = 5 \cdot t_3 + 4 \cdot 3 - 1 = 621$$

- (b) (Vervolg deel (a)) Toon aan dat  $t_n = 5^n - n$  voor alle  $n \geq 0$ .

Basis  $n=0$ :  $5^0 - 0 = 1$ : dit is precies  $t_0$ .

Stap  $n \mapsto n+1$ : Zij  $n \geq 0$  willekeurig en neem aan dat

$t_n = 5^n - n$ . Dan is

$$t_{n+1} = 5 \cdot t_n + 4n - 1 \quad (\text{recursief voorschrift})$$

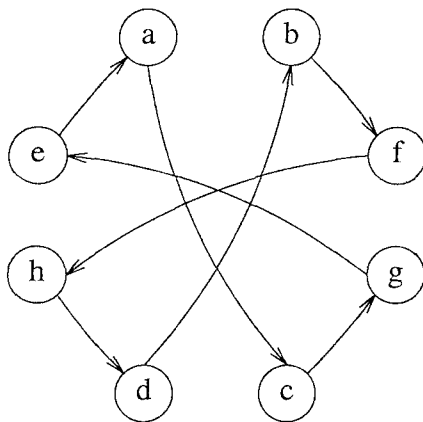
$$= 5 \cdot (5^n - n) + 4n - 1 \quad (\text{inductie hyp.})$$

$$= 5^{n+1} - 5n + 4n - 1$$

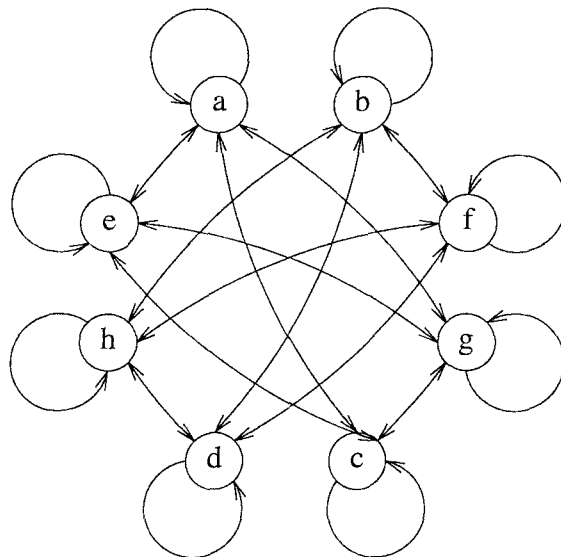
$$= 5^{n+1} - (n+1)$$

- (c) Teken de transitieve afsluiting van de relatie, die in de figuur weergegeven is als een gerichte graaf (gebruik bij voorkeur de figuur op de achterzijde van het multiple choice blad).

Hoeveel pijlen (inclusief eventuele lussen) heb je?



de relatie R als gerichte graaf



transitieve afsluiting van R

N.B.: het is handig om dubbele pijlen te tekenen wanneer een pijl heen en een pijl weer

gaat tussen twee punten. Zo'n dubbele pijl telt dan wel voor twee enkele pijlen!

Totaal: 12 dubbele pijlen (=24 enkele pijlen) plus 8 lussen. Er zijn dus precies  $24+8=32$  paren in relatie. Merk op dat de transitieve afsluiting in dit geval een equivalentierelatie is.

Het procédé van transitieve afsluiting (vorm achtereenvolgens  $R$ ,  $R^2$ ,  $R^3$ , ..., en verenig dit alles) stabilizeert snel:  $R^4$  is de relatie "Identiek",  $R^5$  is dan weer  $R$ , en de cyclus herhaalt zich zonder nog iets nieuws te produceren. De transitieve afsluiting is zodoende gelijk aan

$$R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4$$

of, zo je wil

$$\text{Identiek} \cup R \cup R^2 \cup R^3$$

### Normering:

|    |    |    |    |    |    |    |    |   |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|---|----|
| 1a | 5  | 2a | 8  | 3a | 4  | 4a | 4  | 5 | 20 |
| 1b | 4  | 2b | 3  | 3b | 4  | 4b | 6  |   |    |
| 1c | 5  | 2c | 3  | 3c | 4  | 4c | 7  |   |    |
| 1d | 5  | 2d | 3  | 3d | 5  |    |    |   |    |
|    | 19 |    | 17 |    | 17 |    | 17 |   | 20 |

**Totaal = 90; Cijfer = Totaal/10 + 1**

naam, studierichting & jaar:

LTR II 10-01-02

## 5. Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

5.1. Hier zijn twee voorstellen van logische equivalenties:

(1)  $\exists x(Px \wedge Qx) \equiv \exists xPx \wedge \exists xQx$ , en

(2)  $\exists x(Px \vee Qx) \equiv \exists xPx \vee \exists xQx$ .

- ☐ (1) en (2) zijn geen van beide correct.
- ☐ (1) is correct en (2) is niet correct.
- ☐ (1) is niet correct en (2) is correct.
- ☐ (1) en (2) zijn beide correct.

5.2. Een beginargument met premisse (o.a.)  $\forall x(Px \vee Qx)$  wordt omgezet in twee werkar-  
gumenten waarin deze premisse vervangen werd door  $Px$ , respectievelijk,  $Qx$ . Deze stra-  
tegie is de aaneenschakeling van de strategieën

- $\forall$  eliminatie en  $\vee$  eliminatie.
- ☐  $\forall$  eliminatie en  $\vee$  introductie.
- ☐  $\forall$  introductie en  $\vee$  eliminatie.
- ☐  $\forall$  introductie en  $\vee$  introductie.

5.3. Een totale ordening  $\leq$  in een verzameling  $V$  dient te voldoen aan:

- ☐  $\forall x \in V \forall y \in V, x \leq y$ .
- ☐  $\forall x \in V \exists y \in V, x \leq y$ .
- ☐  $\forall x \in V \forall y \in V (x \leq y \wedge y \leq x)$ .
- $\forall x \in V \forall y \in V (x \leq y \vee y \leq x)$ .

5.4. Zij  $f: V \rightarrow W$  een totale functie. De binaire relatie  $xRy$  in  $V$  met voorschrift " $fx = fy$ " is:

- ☐ een (totale) orderrelatie in  $V$ .
- ☐ een stricte orderrelatie in  $V$ .
- een equivalentierelatie in  $V$ .
- ☐ -- (geen van deze).

5.5. Voor elk reëel getal  $a \neq 0$  zijn gegeven vier functies van type  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :  $ADD_a$ ,  $SUB_a$ ,  $MUL_a$ ,  $DIV_a$ , met voor de hand liggend functievoorschrift. De formule voor de samen-  
gestelde functie  $DIV5 \circ ADD2 \circ MUL3(x)$  is

- ☐  $3x/5 + 2$ .
- $(3x + 2)/5$ .
- ☐  $3(x/5 + 2)$ .
- ☐ -- (geen van deze formules is correct).

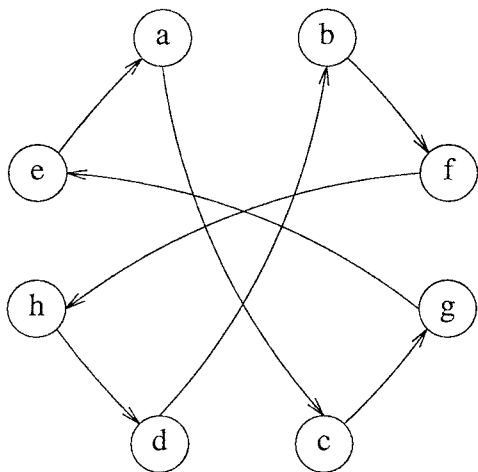
5.6. Het principe van inductie met basis  $b$  is een strategie die een argument met een doel van de vorm  $\forall n \geq b P(n)$  omzet in: een eerste werkargument met de oorspronkelijke premissen en met het doel  $P(b)$ , en

- o een tweede werkargument met extra premissen  $n \geq b$  en  $P(n)$  en met het oorspronkelijke doel.
- o een tweede werkargument met extra premissen  $n \geq b$  en  $P(n) \rightarrow P(n+1)$  en met het doel  $P(n)$ .
- o een tweede werkargument met extra premissen  $n \geq b$  en  $P(n+1)$  en met het doel  $P(n+1) \rightarrow P(n)$ .
- een tweede werkargument met extra premissen  $n \geq b$  en  $P(n)$  met het doel  $P(n+1)$ .

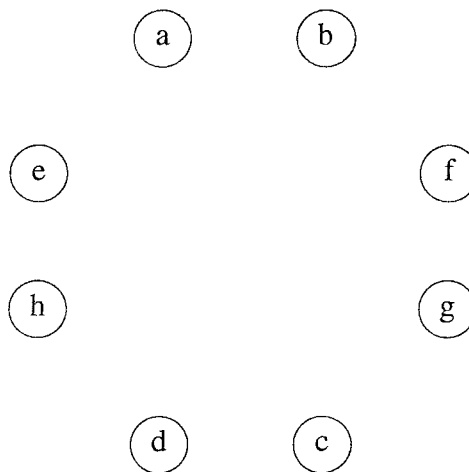
Volgende tabel hoort bij vraag 3, over functies.

| $x =$               | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 |
|---------------------|---|---|---|---|---|
| $f \circ g \circ h$ |   |   |   |   |   |
| $h \circ g \circ f$ |   |   |   |   |   |
| $g \circ h \circ f$ |   |   |   |   |   |

Volgende figuur hoort bij vraag 4c (transitieve afsluiting).



de relatie R als gerichte graaf



transitieve afsluiting van R