

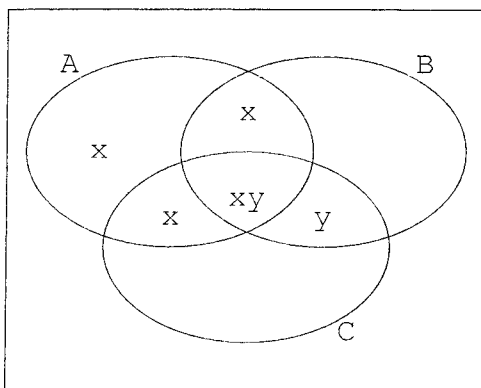
Opgelet: er is een apart multiple-choice gedeelte op de laatste bladzijde (vraag 5). Schrijf op dat blad je naam en lever het mee in met je overige tentamenkopij!

1. Verzamelingen.

- (a) Maak een Venn-diagram voor elk van de formules

$$(A \setminus (B \cap C))', \quad A' \cup (B \cap C),$$

en geef duidelijk aan welk gebied beschreven wordt door de formules. Zijn de twee verzamelingen gelijk?

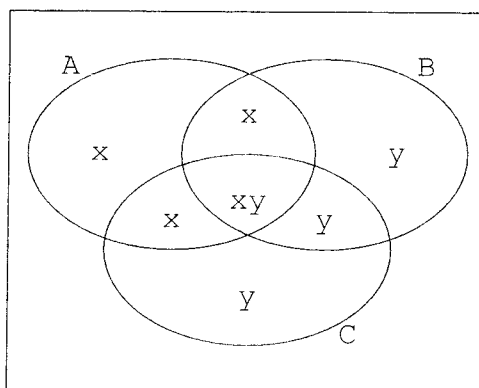


$x: A$

$y: B \cap C$

x zonder $y: A \setminus (B \cap C)$

geen x , of $y: (A \setminus (B \cap C))'$



$x: A$

$y: B \cap C$

geen x , of $y: A' \cup (B \cap C)$

gelijk

- (b) Maak met de atomaire proposities " $d \in A$ ", " $d \in B$ ", " $d \in C$ ", en de voegwoorden " $\wedge$ ", " $\vee$ ", " $\neg$ ", een samengestelde uitspraak die uitdrukt dat

$$d \in (A \setminus (B \cap C))'.$$

Oplossing: $\neg (d \in A \wedge \neg (d \in B \wedge d \in C))$.

Logisch equivalent via DeMorgan's wet en involutie:

$$\neg d \in A \vee (d \in B \wedge d \in C)$$

- (c) Hierna wordt telkens een verzameling V gegeven, samen met een collectie deelverzamelingen $P_1, P_2, \dots$. Vormen de deelverzamelingen een partitie van de gegeven verzameling V ? Antwoord met "ja" of "nee"; bij "nee", geef aan wat er schort.

- (i) $Tien := \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ met deelverzamelingen

$$P_1 := \{1, 7\}.$$

$$P_2 := \{x : x \in Tien, x \text{ deelbaar door } 2\},$$

$$P_3 := \{x : x \in Tien, x \text{ deelbaar door } 3\},$$

$$P_4 := \{x : x \in Tien, x \text{ deelbaar door } 5\},$$

Nee: niet-disjuncte parten: $6 \in P_2 \cap P_3$, $10 \in P_2 \cap P_4$.

- (ii) $Worpen := Ogen \times Ogen$, waarbij $Ogen := \{1, 2, \dots, 6\}$, met elf deelverzamelingen $P_2, \dots, P_{12}$. Verzameling nummer k (met $2 \leq k \leq 12$) is

$$P_k := \{ \langle o_1, o_2 \rangle : o_1, o_2 \in Ogen, o_1 + o_2 = k \}.$$

Bijvoorbeeld, P_3 is de verzameling van alle worpen met som 3.

Oplossing: dit is een partitie. Elke worp is een paar ogen met unieke som k tussen 2 en 12 (beide grenzen inbegrepen). Elke worp behoort dus tot één van de parten P_k

2. Relaties. Gegeven zijn de volgende "imitatie schaakbord-relaties" *Paard* en *Zwart* in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (een "oneindig schaakbord").

Relatievoorschrift [CORRECTIE!] $\langle x_1, x_2 \rangle \text{ Paard } \langle y_1, y_2 \rangle$:

$|x_1 - y_1| = 2$ en $|x_2 - y_2| = 1$, of, $|x_1 - y_1| = 1$ en $|x_2 - y_2| = 2$.

Bijvoorbeeld, $\langle 3, 6 \rangle \text{ Paard } \langle 1, 7 \rangle$ want: $|3-1|=2$ en $|6-7|=1$

(Deze relatie imiteert de "paardensprong".)

Relatievoorschrift $\langle x_1, x_2 \rangle \text{ Zwart } \langle y_1, y_2 \rangle$: $y_1 + y_2$ is even.

Bijvoorbeeld, $\langle 3, 6 \rangle \text{ Zwart } \langle 1, 1 \rangle$

(Deze relatie imiteert een willekeurige sprong naar een "zwart" even-som vak.)

(a) Controleer dat $\langle 0, 0 \rangle (\text{Paard} \circ \text{Paard}) \langle 1, 1 \rangle$.

Tussenschakel is $\langle 2, -1 \rangle$:

$\langle 0, 0 \rangle \text{ Paard } \langle 2, -1 \rangle \text{ Paard } \langle 1, 1 \rangle$

(b) Geef voor de relaties *Paard* en *Zwart* aan of deze symmetrisch en/of transitief zijn. U kunt bijvoorbeeld de antwoorden in een tabel groeperen; "ja" of "nee" volstaat in dit onderdeel.

	symmetrisch	transitief
Paard	ja	nee
Zwart	nee	ja

(c) Laat zien door middel van een voorbeeld dat $\text{Paard} \circ \text{Zwart} \neq \text{Zwart} \circ \text{Paard}$.

Merk op dat je bij Zwart NA Paard steeds uitkomt op een even vak. De paardesprong wisselt de "kleur" (van even kom je op oneven en omgekeerd), dus bij Paard NA Zwart kom je (via een even vak) altijd uit op een oneven vak. Concreet: $\langle 0, 0 \rangle (\text{Zwart NA Paard}) \langle 5, 5 \rangle$ maar niet $\langle 0, 0 \rangle (\text{Paard NA Zwart}) \langle 5, 5 \rangle$

3. Argumentvormen en strategie. We bekijken de volgende argumentvorm met vier proposities O, E, OK, EK .

(*) $E \vee O, EK \rightarrow \neg OK, E \rightarrow EK, \therefore OK \rightarrow O$.

(a) Geef dit argument weer in goed Nederlands met behulp van volgende interpretatiesleutel.

$E :=$ "dit getal is even"
 $O :=$ "dit getal is oneven"
 $EK :=$ "dit getal heeft een even kwadraat"
 $OK :=$ "dit getal heeft een oneven kwadraat"

Dit getal is even of oneven. Is zijn kwadraat even, dan is dit kwadraat niet oneven. Is het getal even, dan ook zijn kwadraat. $\therefore$ Is het kwadraat oneven, dan is dit getal zelf oneven.

- (b) De argumentvorm (*) is correct. Geef een bruikbare strategie om dit te controleren. Zo'n strategie moet een schema zijn dat begint met

	premissen	doel
Beginargument	$E \vee O, EK \rightarrow \neg OK, E \rightarrow EK$	$OK \rightarrow O$
..		

	premissen	doel
Beginarg.	(1): $E \vee O$, (2): $EK \rightarrow \neg OK$, (3): $E \rightarrow EK$	$OK \rightarrow O$
Werkarg.	(1), (2), (3), (4): OK	O

Dit is de strategie van $\rightarrow$ introductie.

- (c) Geef nu een verbaal of schematisch bewijs van deze correctheid volgens je strategie uit (b). Je mag (als je dat eenvoudiger vind) in dit onderdeel de interpretatie uit (b) gebruiken. Waarschuwing: laat je niet verleiden tot premissen die niet genoemd werden!

Schematische redenering:

premissen(n)	
2,4 5 $\neg EK$	Modus Tollens
3,5 6 $\neg E$	Modus Tollens
1,6 $\therefore O$	Disjunctief Syllogisme

(Semi-)Verbale redenering: Neem aan dat OK . Omdat $EK \rightarrow \neg OK$ volgt $\neg EK$ en omdat $E \rightarrow EK$ volgt nu $\neg E$. Aangezien E of O moet wel O gelden.

N.B.: er is meestal meer dan één bruikbare strategie. In deze opgave kun je na $\rightarrow$ introductie ook $\vee$ eliminatie plegen met premisse (1). Je hebt dan twee werkargumenten, die je kan controleren met schakelen van standaard argumentvormen. Het geheel is iets bewerkelijker dan de oplossing hierboven.

Je kan na $\rightarrow$ introductie ook de strategie van het ongerijmde toepassen ($\neg O$ als extra premisse, doel wordt $\perp$). Het ontstane werkargument kun je dan snel controleren met Disjunctief Syllogisme en tweemaal Modus Ponens. Probeer maar!

4. Predicatenlogica. We beschikken over volgende formule:

$$(*) \quad \exists y (Wy \wedge \forall x (Sx \rightarrow \neg Cxy)).$$

- (a) Gegeven zijn twee verzamelingen *Studenten* en *WerkDagen* (met voor de hand liggende elementen. Laat Sx betekenen: $x \in \text{Studenten}$ en laat Wy betekenen: $y \in \text{WerkDagen}$. Geef nu een omzetting van de formule uit (a) naar een formule met beperkte kwantoren " $\forall x \in \text{Studenten}$ " en " $\exists y \in \text{WerkDagen}$ ".

$$\exists y \in \text{WerkDagen}, \forall x \in \text{Studenten}, \neg Cxy$$

- (b) Interpreteer de gegeven formule (*) in goed Nederlands met behulp van volgende vertaalsleutel.

$Sx :=$ "x is student"

$Wx :=$ "x is een werkdag"

$Cxy :=$ "x volgt college op y"

Via de omzetting naar beperkte kwantoren: "er zijn werkdagen waarop alle studenten geen college volgen"

Vlotter: "er zijn werkdagen waarop geen studenten college volgen"

- (c) Werk de ontkenning van de formule (*) uit door het negatieteken " $\neg$ " zover mogelijk naar binnen te werken. Geef aan welke logische equivalenties uit propositie- en predicatenlogica je daarbij gebruikt.

$$\neg \exists y (Wy \wedge \forall x (Sx \rightarrow \neg Cxy)) \equiv (\text{negatie } \exists)$$

$$\forall y \neg (Wy \wedge \forall x (Sx \rightarrow \neg Cxy)) \equiv (\text{negatie } \wedge)$$

$$\forall y (\neg Wy \vee \neg \forall x (Sx \rightarrow \neg Cxy)) \equiv (\text{negatie } \forall)$$

$$\forall y (\neg Wy \vee \exists x \neg (Sx \rightarrow \neg Cxy)) \equiv (\text{negatie implicatie})$$

$$\forall y (\neg Wy \vee \exists x (Sx \wedge \neg \neg Cxy)) \equiv (\text{Involutie})$$

$$\forall y (\neg Wy \vee \exists x (Sx \wedge Cxy))$$

Normering:

1a	6	2a	3	3a	5	4a	6	5	20
1b	4	2b	8	3b	6	4b	6		
1c	8	2c	6	3c	6	4c	6		
	18		17		17		18		20

$$\text{Cijfer} = \text{Totaal}/10 + 1$$

naam, studierichting & jaar:

12-11-01

5. Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toege-licht.

5.1. A en B zijn verzamelingen. De formule $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ staat voor:

- ☐ Een lege verzameling.
- ☐ Het complement van de vereniging van A en B .
- Het symmetrisch verschil van A en B .
- ☐ De doorsnede van het complement van A met het complement van B .

5.2. De inverse van de binaire relatie *IsVriendVan* is de relatie

- ☐ *IsVijandVan*.
- *IsVriendVan*.
- ☐ *WasVriendVan*.
- ☐ *HeeftGeenVrienden*.

5.3. Volgende taalconstructie is een propositie:

- ☐ zij $\text{getal} := 1$; voor $\text{teller} := 1$ tot 10 doe $\text{getal} := \text{getal} * \text{teller}$ en $\text{teller} := \text{teller} + 1$.
- ☐ waarom moeilijk maken als makkelijk ook kan?
- de uitkomst van een plus een is niet gelijk aan twee.
- ☐ als dit maar goed afloopt..

5.4. Zij $o :=$ "het onweert", $r :=$ "het regent", $s :=$ "het stormt", $t :=$ "de tocht gaat door". De vertaling via deze sleutel van de zin "als het regent gaat de tocht door, maar als het onweert of stormt niet" is:

- $(r \rightarrow t) \wedge (o \vee s \rightarrow \neg t)$.
- ☐ $(r \rightarrow t) \wedge \neg(o \vee s \rightarrow t)$.
- ☐ $r \rightarrow t \wedge \neg(o \vee s)$.
- ☐ $r \wedge \neg(o \vee s) \rightarrow t$.

5.5. Een argumentvorm is correct als

- ☐ de conclusie (het doel) waar is.
- ☐ de premissen waar zijn.
- de conclusie waar is telkens wanneer de premissen waar zijn.
- ☐ de interpretatie geen merkbare tegenspraak oplevert.

5.6. Een beperkte existentiële kwantor is

- ☐ Een zinswending van de vorm "ten hoogste één x voldoet aan ..".
- ☐ Een zinswending van de vorm "slechts enkele x voldoen aan ..".
- ☐ Een zinswending van de vorm "voor sommige x geldt niet..".
- Een zinswending van de vorm "voor sommige $x \in A$ geldt ..".