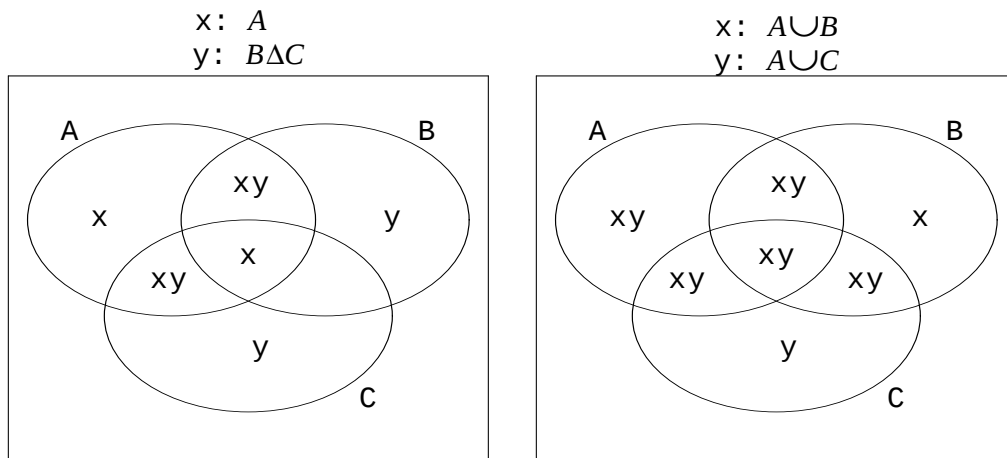


Onderwerp: Verzamelingen

1. Venn-diagrammen. Maak een Venn-diagram voor elk van de twee opgegeven formules. Geef duidelijk aan welk gebied beschreven wordt door de formules. Zijn de twee beschreven verzamelingen gelijk?

$$A \cup (B \Delta C), \quad (A \cup B) \Delta (A \cup C).$$



x of y of $xy: A \cup (B \Delta C)$

x of y , niet $xy: (A \cup B) \Delta (A \cup C)$

Verschillend gebied in beide figuren, dus ongelijk.

2. Verzamelingenalgebra. Vereenvoudig zover mogelijk met behulp van verzamelingenalgebra. Geef daarbij aan welke wetten je gebruikt (als je de naam niet meer kent, geef dan de formule).

$$(A' \cap (A \cup B'))'.$$

$$(A' \cap (A \cup B'))' = (\text{De Morgan})$$

$$A'' \cup (A \cup B')' = (\text{De Morgan})$$

$$A'' \cup (A' \cap B'') = (\text{Involutie } 2^*)$$

$$A \cup (A' \cap B) = (\text{distrib.})$$

$$(A \cup A') \cap (A \cup B) = (\text{complement})$$

$$U \cap (A \cup B) = (\text{identiteit})$$

$$A \cup B.$$

Alternatieve berekening:

$$(A' \cap (A \cup B'))' = (\text{distrib.})$$

$$((A' \cap A) \cup (A' \cap B'))' = (\text{complement})$$

$$(\emptyset \cup (A' \cap B'))' = (\text{identiteit})$$

$$(A' \cap B')' = (\text{De Morgan})$$

$$A'' \cup B'' = (\text{Involutie } 2^*)$$

$$A \cup B.$$

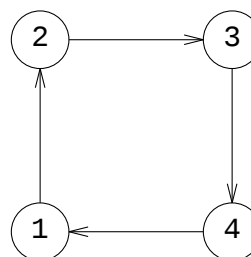
Onderwerp: Relaties

3. Diversen. We beschikken over volgende binaire relatie R in de verzameling $V := \{1, 2, 3, 4\}$:

$$R := \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 1 \rangle \}.$$

- (a) Geef de matrixvoorstelling van R (rij- en kolomnummers moeten overeenstemmen met de elementen 1,2,3,4 van V).

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

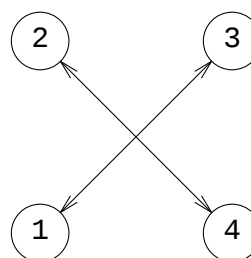


- (b) Geef de inverse relatie R^{-1} weer door opsomming.

$$R^{-1} = \{ \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle \}$$

- (c) Teken de gerichte graaf van de samengestelde relatie $S := R \circ R$.

schakel $\langle 1, 2 \rangle$ aan $\langle 2, 3 \rangle$: $\langle 1, 3 \rangle$
 schakel $\langle 2, 3 \rangle$ aan $\langle 3, 4 \rangle$: $\langle 2, 4 \rangle$
 schakel $\langle 3, 4 \rangle$ aan $\langle 4, 1 \rangle$: $\langle 3, 1 \rangle$
 schakel $\langle 4, 1 \rangle$ aan $\langle 1, 2 \rangle$: $\langle 4, 2 \rangle$



- (d) Is de relatie S reflexief? Symmetrisch? Antwoord met alleen ja of nee.

Reflexief: nee, Symmetrisch: Ja.

Onderwerp: Propositielogica: taal en Waarheid

4. Logische equivalentie.

- (a) Wat bedoelt men in de propositielogica met: twee uitspraken zijn logisch equivalent?
- Twee formules zijn logisch equivalent als ze dezelfde waarheidstabel hebben, anders gezegd: als ze in alle omstandigheden dezelfde waarheidswaarde hebben.
- Ook goed zijn de antwoorden
- Twee formules zijn logisch equivalent als de ene uit de andere volgt door middel van een geldig argument.
 - Twee formules zijn logisch equivalent als de ene in de andere kan worden omgezet door middel van propositiealgebra.
- (b) Controleer met een waarheidstabel of volgende twee proposities logisch equivalent zijn:
- $$p \wedge (q \rightarrow r); (p \wedge q) \rightarrow (p \wedge r).$$

p	q	r	$p \wedge (q \rightarrow r) \quad (p \wedge q) \rightarrow (p \wedge r)$					
0	0	0	0	1	0	1	0	
0	0	1	0	1	0	1	0	
0	1	0	0	0	0	1	0	
0	1	1	0	1	0	1	0	
1	0	0	1	1	0	1	0	
1	0	1	1	1	0	1	1	
1	1	0	0	0	1	0	0	
1	1	1	1	1	1	1	1	

Eerste vier lijnen verschillend: niet logisch equivalent

(c) Zijn de haakjes overbodig in een van deze formules?

Eerste formule: haakjes nodig.

Tweede formule: haakjes overbodig.

5. Vertalen. Ontbind volgende uitspraken in atomaire deeluitspraken, geef deze een naam, en geef daarmee de logische vorm van het geheel weer. Gebruik geen overbodige haakjes.

"je let op, of je raakt de draad kwijt en je begrijpt het verhaal niet"

Vertaalsleutel:

$p :=$ "je let op"

$q :=$ "je raakt de draad kwijt"

$r :=$ "je begrijpt het verhaal"

Vertaling:

$p \vee (q \wedge \neg r)$

Onderwerp: Propositielogica: Argumentvorm en Redenering

6. Schakeling van standaard argumenten. Verifiëer volgend argument door aaneenschakelen van standaardargumenten. Geef daarbij de naam van de gebruikte argumenten (als je de naam vergeten bent, geef dan de gebruikte argumentvorm).

$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow s, \text{ niet } s, \therefore r$

Premissen nummeren voor het gemak:

(1) $p \vee q$, (2) $p \rightarrow r$, (3) $q \rightarrow s$, (4) $\neg s$

premissen:	tussenconclusie:	gebruikte regel:
3, 4	(5) $\neg q$	Modus Tollens
1, 5	(6) p	Disjunctief syllogisme
2, 6	$\therefore r$	Modus Ponens

7. Strategie en Bewijs.

(a) Geef een strategie om volgende "Invoerregel" te controleren:

$p \rightarrow (q \rightarrow r), \therefore p \wedge q \rightarrow r.$

	Premissen:	Doel:
Beginsituatie	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$p \wedge q \rightarrow r$
Aanpassing	$p \rightarrow (q \rightarrow r), p \wedge q$	r
Werksituatie	$p \rightarrow (q \rightarrow r), p, q$	r

De eerste strategie is $\rightarrow$ introductie, gevolgd door $\wedge$ -eliminatie.

- (b) Je strategie bevat een werkargument. Controleer nu dit argument door aaneenschakelen van standaardargumenten.

Premissen nummeren voor het gemak:

(1) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$, (2) p , (3) q

premissen:	tussenconclusie:	gebruikte regel:
1,2	(4) $q \rightarrow r$	Modus Ponens
4,3	$\therefore r$	Modus Ponens

N.B.: De strategie van "Aanpassing" naar "Werksituatie" in deel (a) komt neer op het voorwaards toepassen van de regel van conjunctieve simplificatie. Je kan dus ook de "Aanpassing" als "Werksituatie" nemen, en het bewijs in deel (b) beginnen met conjunctieve simplificatie.

Predicatenlogica

8. Vertalen. Vertaal met de aangereikte vertaalsleutel:

"Al wie vrienden heeft, is niet eenzaam" (universum van personen).

$Vxy := x$ heeft y tot vriend

$Ex := x$ is eenzaam

[alle personen x]

als [x heeft vrienden] dan [x is niet eenzaam]

[alle personen x]

als [sommige personen y] [x heeft vriend y]

dan [x is niet eenzaam]

[alle personen x]

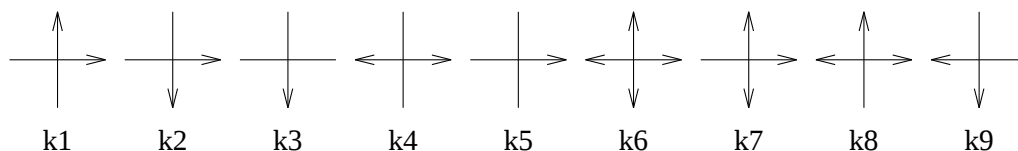
$(\exists y \forall xy) \rightarrow \neg Ex$

$\forall x ((\exists y \forall xy) \rightarrow \neg Ex)$

$\forall x (\exists y \forall xy \rightarrow \neg Ex)$

(binnenste haakjes overbodig)

9. Situatie-logica. Gegeven is een universum van kruisen waarvan sommige armen een pijlpunt hebben en andere niet. Laat Bx , Ox , Lx , Rx respectievelijk uitdrukken dat x een pijl naar boven, onder, links, rechts, heeft.



- (a) Geef de waarheidsverzameling van de open zin *niet* $Bx \wedge$ *niet* Ox

waarheidsverzameling van $\neg Bx \wedge \neg Ox$ is $\{ k4, k5 \}$

- (b) Geef de interpretatie in vlot en correct nederlands: $\forall x (Lx \rightarrow \text{niet } Bx \wedge \text{niet } Ox)$.
als er een pijl naar links is, dan is er geen pijl naar boven en geen pijl naar onder.
- (c) Geef aan met ja of met nee of volgende zinnen waar zijn in dit universum.
- (i) $\exists x (Bx \wedge Ox \wedge Lx \wedge Rx)$.
Ja, k6
- (ii) $\forall x (Lx \vee Rx)$.
Nee, k3
- (iii) $\forall x (Lx \wedge Rx \rightarrow Bx \vee Ox)$.
Nee, k4

Normering:

1	8	2	8	3a	4	4a	3	5	8	6	8	7a	4	8	6	9a	4
				3b	4	4b	6					7b	4			9b	4
				3c	4	4c	3									9c	6
				3d	6												
8				18		12			8	8		8		6		14	

Totaal = 90; **Cijfer** = $\frac{\text{Totaal}}{10} + 1$.

Dit cijfer kan nog worden verhoogd met $\frac{1}{2}$ bonuspunt.