

1. Verzamelingen

- (a) Maak een Venn-diagram voor elk van de formules

$$(A \Delta B) \cap C, \quad (A \cap C) \Delta (B \cap C)$$

en geef duidelijk aan welk gebied beschreven wordt door de formules. Zijn de twee verzamelingen gelijk?

- (b) Maak met de proposities " $d \in A$ ", " $d \in B$ ", " $d \in C$ " en de voegwoorden " $\wedge$ ", " $\vee$ ", " $\neg$ ", een samengestelde uitspraak die uitdrukt dat

$$d \in (A \cap B') \cup (B \cap C').$$

- (c) Hierna wordt telkens een verzameling gegeven, samen met enkele deelverzamelingen $P_1, P_2, \dots$. Vormen de deelverzamelingen een partitie van de gegeven verzameling? Als het een partitie is, volstaat het antwoord "ja", maar als het geen partitie is, geef dan aan wat er schort.

- (i) $Twintig := \{2, 3, 4, \dots, 20\}$ met deelverzamelingen

$$P_1 := \{x : x \in Twintig, x \text{ deelbaar door } 2\},$$

$$P_2 := \{x : x \in Twintig, x \text{ deelbaar door } 3\},$$

$$P_3 := \{x : x \in Twintig, x \text{ deelbaar door } 5\},$$

$$P_4 := \{7, 11, 13, 17, 19\}.$$

- (ii) $Datums := \{01, 02, \dots, 31\} \times \{01, 02, \dots, 12\}$ met deelverzamelingen

$$P_1 := Lente := \{d : d \in Datums, d \text{ van } \langle 22, 03 \rangle \text{ tot } \langle 21, 06 \rangle\},$$

$$P_2 := Zomer := \{d : d \in Datums, d \text{ van } \langle 22, 06 \rangle \text{ tot } \langle 21, 09 \rangle\},$$

$$P_3 := Herfst := \{d : d \in Datums, d \text{ van } \langle 22, 09 \rangle \text{ tot } \langle 21, 12 \rangle\},$$

$$P_4 := Winter := \{d : d \in Datums, d \text{ van } \langle 22, 12 \rangle \text{ tot } \langle 21, 03 \rangle\}.$$

In (ii) zijn de grenzen steeds inbegrepen.

2. Vertalen en Waarheidstabellen

Gegeven zijn de vertaalsleutels $r = \text{"Het regent"}$, $o = \text{"Het onweert"}$, $s = \text{"Het stormt"}$, $t = \text{"De tocht gaat door"}$.

- (a) Geef volgende uitspraken in symbolische vorm weer.

(i) "Het regent, het onweert, en het stormt, maar de tocht gaat door".

(ii) Indien het regent, onweert, of stormt, gaat de tocht niet door.

- (b) Vertaal in goed Nederlands: $\neg(r \vee o) \rightarrow t$.

- (c) Geef de waarheidstabel voor de formule $(r \rightarrow t) \wedge (o \rightarrow \neg t)$. Geef daarbij duidelijk aan welke kolom die van de hele formule is.

3. Negatie en Meervoudige Kwantoren

- (a) Het Universe of Discourse in dit onderdeel is $U := \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Welke van volgende uitspraken zijn waar en welke niet?

(i) $\forall x (x \text{ oneven} \rightarrow \exists y, x < y)$.

(ii) $\forall x (x \text{ even} \rightarrow \exists y, x = 2y)$.

(iii) $\exists x \forall y, y \leq x$.

(antwoord volstaat)

- (b) (Vervolg onderdeel (a)) Werk de negatie uit van de uitspraken in (a).
- (c) We beschikken over vier vakken: Logische Taal en Redeneermethoden (LTR), Inleiding Programmeren (IP), Representatie en Zoeken (RZ), en Inleiding Informatica (II). Laat $S = \{jan, betty, christel, dirk\}$ en laat $V = \{LTR, IP, RZ, II\}$. De uitspraak

$G(x,y)$ - “ x is geslaagd voor y ”

is als volgt geëvalueerd voor $x \in S$ en $y \in V$.

$x \backslash y$	LTR	IP	RZ	II	$\forall y \in V, G(x,y)$	$\exists y \in V, G(x,y)$
jan	T	T	F	T	*	*
betty	F	F	F	F	*	*
christel	T	T	T	T	*	*
dirk	T	F	T	F	*	*
$\forall x \in S, G(x,y)$	*	*	*	*		
$\exists x \in S, G(x,y)$	*	*	*	*		

Evalueer de plaatsen rechts en onder in de tabel (gemarkt met een ster) als waar (T) of onwaar (F).

- (d) (Vervolg onderdeel (c)) Geef aan welke van volgende uitspraken waar zijn en welke onwaar zijn (antwoord volstaat).

$\exists x \in S \forall y \in V, Gxy$; $\forall x \in S \exists y \in V, Gxy$; $\forall y \in V \exists x \in S, Gxy \rightarrow \exists y \in V, \forall x \in S, Gxy$.

4. Bewijzen. We beschikken over een verzameling V en een binaire operatie $\#$ in V , waarbij voor elke twee elementen x, y van V een “resultaat” $x\#y$ wordt geproduceerd. (Denk bijvoorbeeld aan $\mathbb{N}$ met optelling of met vermenigvuldiging.) Van de bewerking $\#$ is verder bekend dat ze associatief is:

$$\forall x \in V, \forall y \in V, \forall z \in V, x\#(y\#z) = (x\#y)\#z.$$

Voer nu in: de binaire relatie $|$ in V met als relatievoorschrift:

$$x \stackrel{def}{|} y \leftrightarrow \exists u \in V, x\#u = y.$$

- (a) Geef een predicaatenlogische vertaling van de uitspraak dat een relatie R in een verzameling V transitief is.

- (b) Geef een uitgewerkte strategie voor een bewijs van de uitspraak dat de relatie | transitief is.
- (c) Geef nu een bewijs met woorden volgens de strategie in onderdeel (b).

5. Ordening. Zij *Alfabet* de verzameling van alfabetische symbolen 'a' .. 'z' met de gebruikelijke alfabetische ordening.

- (a) Geef (in woorden of met formules) een beschrijving van de lexicografische ordening op de verzameling $Alfabet^4$ van alle vier-letter woorden.
- (b) Idem, voor de Cartesische ordening op $Alfabet^4$.
- (c) In dit onderdeel heeft $Alfabet^4$ de lexicografische ordening. Zij V de verzameling van alle vier-letterwoorden met op de tweede én op de derde plaats een van de letters 'b', 'c'. Bijvoorbeeld, het woord "pbcq" hoort tot V . Geef het grootste en het kleinste element van V of leg uit waarom zo'n element er niet is.
- (d) In dit onderdeel heeft $Alfabet^4$ de Cartesische ordening. Zij W de verzameling van alle vier-letterwoorden met op de tweede plaats een 'b' óf op de derde plaats een 'c'. Geef het grootste en het kleinste element van W of leg uit waarom zo'n element er niet is.

6. Equivalentierelaties. Zij E de verzameling van alle niet-lege letterwoorden van lengte ≤ 5 . Twee woorden w_1, w_2 in E staan in relatie R als ze dezelfde lengte hebben en als ze beide beginnen met een klinker of beide beginnen met een medeklinker.

- (a) De relatie R is een equivalentierelatie is in E . Toon alleen aan dat R transitief is.
- (b) Hoeveel verschillende equivalentieklassen zijn door volgende woorden vertegenwoordigd? (Antwoord volstaat)
"ja", "nee", "wel", "niet", "iets", "niets", "schei", "ai" "inf".
- (c) (Vervolg onderdeel (a)) Geef een volledig representantensysteem voor de relatie R in E . U hoeft geen toelichting te geven.

7. Functies. Gegeven zijn de functies $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ en $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, met als respectievelijk functievoorschrift:

$$f(x) = x^2; \quad g(x) = x/2; \quad h(x) = x - 5.$$

- (a) Vul volgende tabel in met de juiste waarde, indien er een waarde is.

	3	4	6	7	9
$f \circ g \circ h$					
$h \circ g \circ f$					
$g \circ h \circ f$					

- (b) Geef het definitiegebied en waardengebied van de functies f, g en h .
- (c) Welke van f, g , of h , zijn totale functies? Antwoord volstaat.

- (d) Geef voor f , g , en h , aan of hun inverse bestaat, (zo ja) wat hier het functievoorschrift van is, en of die inverse een totale functie is.

Normering:

1	(a) 4 (b) 3 (c) 5	2	(a) 3 (b) 3 (c) 5	3	(a) 3 (b) 3 (c) 5 (d) 4	4	(a) 3 (b) 5 (c) 5	5	(a) 3 (b) 3 (c) 4 (d) 4	6	(a) 4 (b) 4 (c) 5	7	(a) 3 (b) 3 (c) 2 (d) 4
	12		11		15		13		14		13		12

Totaal = 90; **Cijfer** = $\frac{\text{Totaal}}{10} + 1$.