

1. Ordening

- (a) Gegeven is een partiële geordende verzameling $V, \leq$ en een deelverzameling $A \subseteq V$. Wat bedoelt men met een maximaal element p van een verzameling A , en wat bedoelt men met een grootste element p van een verzameling A ? Geef de uitspraak telkens weer in predicaatlogische notatie.
- (b) Neem voor V de verzameling $\mathbb{R}^2$ met de Cartesische ordening:

$$\langle x_1, x_2 \rangle \leq \langle y_1, y_2 \rangle \stackrel{\text{def}}{\iff} x_1 \leq y_1 \text{ en } x_2 \leq y_2.$$

Neem als verzameling A :

$$\{ \langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle \}.$$

Welk(e) element(en) zijn maximaal, resp. grootste, van A ?

- (c) Een stelling zegt: is p een grootste element van A , dan is p een maximaal element van A . Geef een uitgewerkte bewijsstrategie voor deze uitspraak.
- (d) (vervolg van (c)) Geef een bewijs van genoemde stelling volgens de strategie uit (c).

2. Equivalentierelaties. Zij W de verzameling van alle drie-letter woorden met uitsluitend de letters 'a', 'b', 'c', 'd', 'e'. Een relatie R in W is gegeven door het voorschrift:

$w_1 R w_2$ precies dan als w_1 en w_2 hetzelfde aantal 'a's hebben en ook hetzelfde aantal medeklinkers hebben.

- (a) Controleer dat R een equivalentierelatie is in W .
- (b) Noem drie elementen uit de equivalentieklasse van "bea" waarin een 'c' voorkomt. Hoeveel elementen bevat de equivalentieklasse van "ada"?
- (c) Wat verstaat men onder een volledig representantensysteem van een equivalentierelatie R in een verzameling W ?
- (d) Geef een volledig representantensysteem voor de relatie R .

3. Functies. Zij A de verzameling letters 'a' t/m 'z' en W de verzameling van alle woorden (al of niet bestaande) van lengte ≥ 2 die alleen de letters uit A bevatten. We bekijken de volgende functies.

$f: W \rightarrow W$, $f(x)$ = het woord x achterstevoren gespeld.

$$(\text{bv. } f(\text{"abc"}) = \text{"cba"})$$

$g: W \rightarrow A$, $g(x)$ = de derde letter van het woord x .

$$(\text{bv. } g(\text{"ltr"}) = \text{'r'})$$

$h: A \rightarrow W$, $h(x)$ = het woord van drie letters beginnend met de letter voorgesteld

door $x \in A$, eindigend met de volgende letter ('z' wordt weer 'a'),
en met de letter 'e' tussenin.

(bv. $h('m') = "men"$)

- (a) Beschrijf het definitiegebied van g en geef het aantal elementen in het waardengebied van h .
- (b) Welke van de functies f , $g \circ h$, $h \circ g$ zijn een-een en welke niet? Beschrijf in voorkomend geval de inverse functie.
- (c) Geef de waarde van volgende uitdrukkingen (indien bestaande)

$h \circ g \circ f("puzzel"); \quad h \circ f \circ g("voor"); \quad f \circ h \circ g("punten").$

4. Inductie en recursie

- (a) Een rij reële getallen $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ is als volgt recursief gedefiniëerd.

$$t_1 := 2; \quad t_{n+1} := 2t_n - 2n + 3 \quad (n \geq 1).$$

Bepaal de eerste vijf termen van de rij $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ en bewijs met inductie dat $t_n = 2^{n-1} + 2n - 1$ voor alle $n \geq 1$. N.B.: $2^0 = 1$.

- (b) Leg bondig uit wat bedoeld wordt met: de transitieve afsluiting van een relatie R in een verzameling V .
- (c) Zij Q_4 de vier-dimensionale kubus, dat is: de verzameling van alle rijtjes van vier bits (0/1), en zij R de binaire relatie in Q_4 met voorschrift

$\stackrel{\text{def}}{x R y} \leftrightarrow x$ en y verschillen in precies één positie.

Beschrijf de transitieve afsluiting van R . U hoeft geen toelichting te geven.

Normering:

1	(a)	6	2	(a)	6	3	(a)	7	4	(a)	9
	(b)	5		(b)	5		(b)	7		(b)	5
	(c)	8		(c)	5		(c)	7		(c)	9
	(d)	4		(d)	6						
23			22			22			23		

Totaal = 90; **Cijfer** = $\frac{\text{Totaal}}{10} + 1$.

Dit cijfer kan nog worden verhoogd met $\frac{1}{2}$ bonuspunt.