

1. Bewijzen

- (a) Geef een formulering in predicaatenlogica, een (redelijk) uitgewerkte bewijsstrategie, en een bewijs volgens deze strategie, van volgende uitspraak over drie gegeven verzamelingen A, B, C :

$$A \setminus C \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus C).$$

- (b) Neem volgende uitspraken.
- (I) Wie op een dag een appel eet, is deze dag niet ziek.
 - (II) Wie op een dag de dokter laat komen, is deze dag ziek.
 - (III) Wie elke dag een appel eet, laat nooit de dokter komen.

We beschikken over de verzamelingen *Personen* en *Dagen*. Geef een vertaling van de drie gegeven zinnen in predicaatenlogica met gebruikmaken van volgende vertaalsleutel:

- $E xy$ - (persoon) x eet op (dag) y een appel.
- $Z xy$ - (persoon) x is op (dag) y ziek.
- $D xy$ - (persoon) x laat op (dag) y de dokter komen.

- (c) (vervolg onderdeel (b)) Geef een uitgewerkte strategie voor een bewijs van de uitspraak $I \wedge II \rightarrow III$, en geef vervolgens een bewijs volgens deze strategie.

2. Ordening. Laat $\leq$ de natuurlijke ordening zijn van $\mathbb{Z}$ en definiëer een nieuwe relatie in $\mathbb{Z}$ door volgend voorschrift.

$$x \leq y \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} 0 \leq x \leq y \text{ of } y \leq x \leq 0.$$

- (a) Toon aan dat $\leq$ een (partiële) ordening is in $\mathbb{Z}$.
- (b) Schets het Hasse diagram van deze ordening, en toon aan dat deze ordening niet totaal is.
- (c) Laat $A := \{-9, -8, \dots, 0, 1, \dots, 9\}$. Heeft A in de ordening $\leq$ een grootste element? Zoniet, geef alle maximale elementen. Heeft A een kleinste element? Zoniet, geef alle minimale elementen.

3. Equivalentierelaties. Zij $V = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, laat m en n gehele getallen ≥ 2 zijn, en zij R de relatie in V met voorschrift

$$\langle x_1, x_2 \rangle R \langle y_1, y_2 \rangle \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} m \text{ deelt } x_1 - y_1 \text{ en } n \text{ deelt } x_2 - y_2.$$

- (a) Toon aan dat R een equivalentierelatie is in V .
- (b) Gegeven dat $m = 2$ en $n = 3$, hoeveel verschillende equivalentieklassen heeft R ?
- (c) Wat verstaat men onder een volledig representantensysteem van een equivalentierelatie R in een verzameling V ? Gegeven dat $m = 2$ en $n = 3$, beschrijf een volledig representantensysteem voor de gegeven relatie R .

4. Functies.

We beschikken over volgende (standaard) functies van type $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\text{div } 2 : x \mapsto x/2, \quad \text{add } 7 : x \mapsto x + 7, \quad \text{mul } 5 : x \mapsto 5 \cdot x.$$

Zij f de samenstelling $\text{div } 2 \circ \text{add } 7 \circ \text{mul } 5$.

- (a) Geef het functievoorschrift bij de functie f (bij voorkeur als een "calculus" formule met $+$, $-$, $\cdot$, $/$).
- (b) Toon (bondig) aan met behulp van de gebruikelijke rekenregels in $\mathbb{R}$ dat

$$\forall x \in \mathbb{R}, (-1 \leq x \leq 1 \rightarrow 1 \leq f(x) \leq 6).$$
- (c) Wat bedoelt men met de uitspraak " f is één-één"? Geef deze uitspraak weer in predicaatlogische notatie en toon aan dat de gegeven functie f één-één is.
- (d) Geef het voorschrift voor de inverse functie f^{-1} .

5. Inductie en recursie

- (a) De rij reële getallen $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ is gegeven door het recursieve voorschrift

$$t_1 := 1, \quad t_{n+1} := 2t_n + n + 1.$$

Geef de eerste vier termen van deze rij, en toon aan met inductie naar n dat $t_n = 2^{n+1} - n - 2$.

- (b) Leg bondig uit wat bedoeld wordt met: de transitieve afsluiting van een relatie R in een verzameling V .
- (c) Zij $R \subseteq \{0, 1, \dots, 6\}^2$ de binaire relatie met voorschrift

$$\stackrel{\text{def}}{x R y} \leftrightarrow |x - y| = 1.$$

(In woorden: $x R y$ precies dan als het verschil in absolute waarde 1 is.) Beschrijf de transitieve afsluiting van R .

Normering:

1	(a)	6	2	(a)	6	3	(a)	8	4	(a)	3	5	(a)	7
	(b)	4		(b)	6		(b)	4		(b)	6		(b)	4
	(c)	8		(c)	6		(c)	6		(c)	6		(c)	7
							(d)	3						
18			18			18			18			18		

Totaal = 90; **Cijfer** = $\frac{\text{Totaal}}{10} + 1$.

Dit cijfer kan nog worden verhoogd met $\frac{1}{2}$ bonuspunt.

NORMERING:

1a	5	2a	6	3a	5	4a	3	5a	8	6a	4	7a	2
b	5	b	6	b	5	b	3	b	6	b	8	b	2
						c	3					c	3
						d	6					d	4
												e	6
10		12		10		15		14		12		17	

$$\text{CIJFER} = \frac{\text{TOTAAL}}{9} + 1$$