

Uitwerking tentamen2: 17-12-99

1. Bewijzen

(a) **Formulerings:** $\forall x (x \in A \wedge C \rightarrow x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C))$.

Expliciet: $\forall x (x \in A \wedge \neg x \in C \rightarrow (x \in A \wedge \neg x \in B) \vee (x \in B \wedge \neg x \in C))$

Strategie:

premissen	doel
Begin situatie	$\forall x (x \in A \wedge C \rightarrow x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C))$
Werk situatie	$x \in A \wedge \neg x \in C \quad x \in A \setminus B \vee x \in B \setminus C$

Bewijs: Zij x een willekeurig element van $A \setminus C$. Dan (definitie) $x \in A$ en $x \notin C$. Nu geldt $x \in B$ of $x \notin B$.

- Eerste geval: $x \in B$. Omdat $x \notin C$ volgt $x \in B \setminus C$.
- Tweede geval: $x \notin B$. Omdat $x \in A$ volgt $x \in A \setminus B$.

Eindeconclusie is dat $x \in A \setminus B$ of $x \in B \setminus C$, conform het doel.

(b) **Vertalingen**

- (I) $\forall x \in \text{Persoon} \forall y \in \text{Dagen} (E, xy \rightarrow \neg Z, xy)$.
- (II) $\forall x \in \text{Persoon} \forall y \in \text{Dagen} (D, xy \rightarrow Z, xy)$.
- (III) $\forall x \in \text{Persoon} (\forall y \in \text{Dagen}, E, xy \rightarrow \neg \exists y \in \text{Dagen}, D, xy)$.

(c) **Strategie:**

premissen	doel
Begin situatie	$I \wedge II \rightarrow III$
Aanpassing	$\forall x \in \text{Persoon}$ $(\forall y \in \text{Dagen}, E, xy \rightarrow \neg \exists y \in \text{Dagen}, D, xy)$
Aanpassing	$I, II, x \in \text{Persoon}$ $\forall y \in \text{Dagen}, E, xy \quad \neg \exists y \in \text{Dagen}, D, xy$
Werk situatie	$I, II, x \in \text{Persoon}$ $\forall y \in \text{Dagen}, E, xy$ $\exists y \in \text{Dagen}, D, xy \quad 1$

Bewijs: Zij x een willekeurig persoon en neem aan (IV) dat x elke dag een appel eet. Stel bovendien: (V) y is een dag waarop x de dokter laat komen. Dan (vanwege premisse II) is x op dag y ziek. Nu zegt premisse I, heeft x op dag y een appel gegeten, dan is hij op dag y NIET ziek. Maar x is op dag y ziek en bijgevolg (modus tollens) x heeft op dag y geen appel gegeten, in tegenspraak met de aanname IV. ■

2. Ordening

(a) **De relatie $\leq$ is reflexief:** Zij $x \in \mathbb{Z}$ willekeurig. Omdat de standaard ordening van $\mathbb{Z}$ totaal is, geldt $0 \leq x$ of $x \leq 0$. Verder is de standaard ordening reflexief, en zodoende $x \leq x$. We vinden hetzij $0 \leq x \leq x$, hetzij $x \leq x \leq 0$. Per voorsschritt is dus $x \leq x$.

De relatie $\leq$ is antisymmetrisch: Zij $x, y \in \mathbb{Z}$ willekeurig en neem aan dat $x \leq y \leq x$. De ongelijkheid $x \leq y$ betekent:

$$(1a) \quad 0 \leq x \leq y \quad \text{of} \quad (1b) \quad y \leq x \leq 0.$$

De ongelijkheid $y \leq x$ betekent:

$$(2a) \quad 0 \leq y \leq x \quad \text{of} \quad (2b) \quad x \leq y \leq 0.$$

Er zijn (vanwege de distributieve wetten voor $\wedge/\vee$) 4 combinaties mogelijk:

- (1a) en (2a): Dan is $x \leq y$ vanwege (1a) en $y \leq x$ vanwege (2a), en dus $x = y$.
- (1a) en (2b): Dan is $x \leq y \leq 0 \leq x \leq y$ en vanwege antisymmetrie en transitiviteit van de standaard ordening volgt $x = y (= 0)$.
- (1b) en (2a): Dan geldt $y \leq x \leq 0 \leq y \leq x$ en vanwege antisymmetrie en transitiviteit van de standaard ordening volgt weer $x = y (= 0)$.
- (1b) en (2b): We hebben nu $y \leq x$ vanwege (1b) en $x \leq y$ vanwege (2b), en dus $x = y$.

De relatie $\leq$ is transitief: Zij $x, y, z \in \mathbb{Z}$ willekeurig en neem aan dat $x \leq y \leq z$. De ongelijkheid $x \leq y$ betekent:

$$(1a) \quad 0 \leq x \leq y \quad \text{of} \quad (1b) \quad y \leq x \leq 0.$$

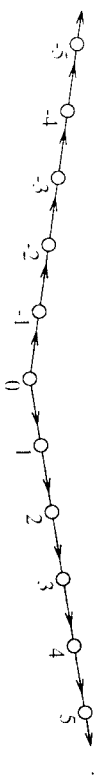
De ongelijkheid $y \leq z$ betekent:

$$(2a) \quad 0 \leq y \leq z \quad \text{of} \quad (2b) \quad z \leq y \leq 0.$$

Er zijn 4 combinaties mogelijk:

- (1a) en (2a): We hebben $0 \leq x \leq y$ vanwege (1a) en $y \leq z$ vanwege (2a). Dus (transitiviteit van de standaard ordening) $0 \leq x \leq z$ en zodoende $x \leq z$ volgens voorschrift.
- (1a) en (2b): We hebben $y \leq 0$ vanwege (2b) en $0 \leq x \leq y$ vanwege (1a). Dus (transitiviteit en antisymmetrie van de standaard ordening) $x = y = 0$. Vanwege (2b) vinden we $z \leq x \leq 0$ en zodoende $x \leq z$ volgens voorschrift.
- (1b) en (2a): Dus (transitiviteit en antisymmetrie van de standaard ordening) $x = y = 0$. Vanwege (2a) vinden we $0 \leq x \leq z$ en zodoende $x \leq z$ volgens voorschrift.
- (1b) en (2b): We hebben $z \leq y$ vanwege (2b) en $y \leq x \leq 0$ vanwege (1a). Dus (transitiviteit van de standaard ordening) $z \leq x \leq 0$ en zodoende $x \leq z$ volgens voorschrift.

(b) **Hasse diagram:**



De ordening $\leq$ is niet totaal omdat bv. -1 en 1 niet vergelijkbaar zijn in de ordening $\leq$.

- (c) Grootste element: geen.
 Maximale elementen: $-9, 9$.
 Kleinste element: 0 .

3. Equivalentierelatie

(a) Aantonen dat R is een equivalentierelatie:

- R is **reflexief**: Zij $x := <x_1, x_2> \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ willekeurig. Dan is $m \mid x_1 - x_1$ en $n \mid x_2 - x_2$, dus $x R x$.
- R is **symmetrisch**: Zij $x := <x_1, x_2> \in y := <y_1, y_2>$ willekeurig in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, en neem aan dat $x R y$. Dan $m \mid x_1 - y_1$ en $n \mid x_2 - y_2$. Bijgevolg, $x_1 \equiv y_1 \pmod{m}$ en $x_2 \equiv y_2 \pmod{n}$. Omdat congruentie modulo m en modulo n beide equivalentierelaties zijn in $\mathbb{Z}$, en dus symmetrisch zijn, volgt $y_1 \equiv x_1 \pmod{m}$ en $y_2 \equiv x_2 \pmod{n}$. Zodoende is $y R x$.
- R is **transitief**: Zij $x := <x_1, x_2>, y := <y_1, y_2>$, en $z := <z_1, z_2>$ willekeurig in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, en neem aan dat $x R y R z$. Dan $m \mid x_1 - y_1$ en $n \mid x_2 - y_2$ en $m \mid y_1 - z_1$ en $n \mid y_2 - z_2$. Bijgevolg, $x_1 \equiv y_1 \pmod{m}$ en $y_1 \equiv z_1 \pmod{m}$ en $x_2 \equiv y_2 \pmod{n}$ en $y_2 \equiv z_2 \pmod{n}$. Omdat congruentie modulo m en modulo n beide equivalentierelaties zijn in $\mathbb{Z}$, en dus transitief zijn, volgt $x_1 \equiv z_1 \pmod{m}$ en $x_2 \equiv z_2 \pmod{n}$.

Terzijde: Je kan ook direct uit de definitie controleren dat R een equivalentierelatie is, zonder terug te vallen op congruentierelaties modulo een getal. Dit kost wel wat meer tijd en rekenwerk.

- (b) We gebruiken het feit dat congruentie modulo 2 precies twee equivalentieklassen heeft en congruentie modulo 3 precies drie equivalentieklassen heeft. Door combineren vinden we precies 6 verschillende equivalentieklassen voor R .
- (c) Een representant genomen uit elke klasse. We gebruiken de standaardrepresentanten $0, 1$ voor congruentie modulo 2 en $0, 1, 2$ voor congruentie modulo 3.
- $$\{<0,0>, <0,1>, <0,2>, <1,0>, <1,1>, <1,2>\}.$$

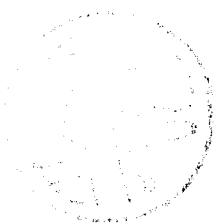
4. Functies

(a) $f(x) = (5 \cdot x + 7)/2$.

(b) Te bewijzen: $\forall x \in \mathbb{R} (-1 \leq x \leq 1 \rightarrow 1 \leq f(x) \leq 6)$.

Bewijs: Zij $x \in \mathbb{R}$ willekeurig en neem aan dat $-1 \leq x \leq 1$.

- Uit $-1 \leq x$ volgt $-5 \leq 5 \cdot x$ (beide leden van een ongelijkheid vermenigvuldigd met hetzelfde positieve getal), dus $2 = -5 + 7 \leq 5 \cdot x + 7$ (beide leden van een ongelijkheid vermeerderd met hetzelfde getal), en zodoende $1 = 2/2 \leq (5 \cdot x + 7)/2$ (beide leden van een ongelijkheid gedeeld door hetzelfde positieve getal). Conclusie: $1 \leq f(x)$.
- Uit $x \leq 1$ volgt $5 \cdot x \leq 5 \cdot 1 = 5$ (beide leden van een ongelijkheid vermenigvuldigd met hetzelfde positieve getal), dus $5 \cdot x + 7 \leq 5 + 7 = 12$ (beide leden van een ongelijkheid vermeerderd met hetzelfde getal), en zodoende $(5 \cdot x + 7)/2 \leq 12/2 = 6$ (beide leden van een ongelijkheid gedeeld door hetzelfde positieve getal). Conclusie: $f(x) \leq 6$.



- (c) f is een 1-1 functie wanneer verschillende inputs leiden tot verschillende outputs. In predicatentheoretische vorm geformuleerd:

$$\forall x_1 \in D_f \forall x_2 \in D_f (x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)).$$

Met contrapositie krijgen we een logisch equivalentie vorm:

$$\forall x_1 \in D_f \forall x_2 \in D_f (f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2).$$

N.B.: D_f is de standaardnotatie voor het domein van f , d.w.z., de verzameling van alle geaccepteerde inputs van f .

Bewijs: Zij $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ willekeurig en neem aan dat $f(x_1) = f(x_2)$. Dit betekent $(5 \cdot x_1 + 7)/2 = (5 \cdot x_2 + 7)/2$. Beide leden van de gelijkheid maal 2 geeft $5 \cdot x_1 + 7 = 5 \cdot x_2 + 7$. Beide leden van de gelijkheid min 7 geeft $5 \cdot x_1 = 5 \cdot x_2$. Beide leden van de gelijkheid gedeeld door 5 geeft $x_1 = x_2$.

(d) Voorschrift voor de inverse functie f^{-1} van f :

$$y \mapsto \underset{\text{idm}(2)}{2 \cdot y} \mapsto \underset{\text{mult}(7)}{2 \cdot y \cdot 7} \mapsto \underset{\text{mult}(5)^{-1}}{(2 \cdot y \cdot 7) \cdot 5}.$$

Zodoende: $f^{-1}(y) = (2 \cdot y \cdot 7) \cdot 5$.

5. Inductie en recursie

(a) $t_1 = 1, t_2 = 4, t_3 = 11, t_4 = 26$.

Bewijs van de formule $t_n = 2^{n-1} \cdot n - 2$ met inductie naar $n \geq 1$.

Basis $n = 1$: $t_1 = 1$ en de formule voor $n = 1$ geeft $2^0 - 1 - 2 = 1$.

Stap $n \rightarrow n+1$: $\mid$ zij $n \geq 1$ willekeurig en onderstel dat de formule geldig is voor deze n $\mid$

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= 2t_n + n + 1 = 2(2^{n-1} \cdot n - 2) + n + 1 = 2^n \cdot 2 - 2n - 4 + n + 1 = \\ &= 2^{n+1} \cdot 1 - n - 3 = 2^{n+1} \cdot 1 - (n+1) - 2. \end{aligned}$$

- (b) Transitieve afsluiting van R is de vereniging van de relaties $R, R^2, R^3, \dots$. Preciezer: het is de verzameling

$$\{<x, y> : \exists n \geq 1, <x, y> \in R^n\}.$$

Het is de kleinste mogelijke transitieve relatie waar R in bevat is.

(c) Berekening van de exponenten van R :

- R^1 verschil in absolute waarde is 1
- R^2 verschil in absolute waarde is 0 of 2.
- R^3 verschil in absolute waarde is 1 of 3.
- R^4 verschil in absolute waarde is 0 of 2 of 4.
- R^5 verschil in absolute waarde is 1 of 3 of 5.

Volgende machten van R leveren niets nieuws meer op. Dus:

Transitieve afsluiting van R is $R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup R^5$. Dit is de "volle relatie"

$$\{0, 1, \dots, 6\}^2.$$