

1. Argumentvormen en vertalen (Propositielogica)

We bekijken het volgende argument.

Als je reist (r), dan ga je met de trein (t) of met de wagen (w). Ga je met de trein, dan ben je milieuvriendelijk (m). Ga je met de wagen, dan ben je niet milieuvriendelijk. $\therefore$ Ben je milieuvriendelijk, dan ga je met de trein of je reist niet.

- (a) Zet bovenstaande uitspraken om in propositielogische formules met de aangegeven sleutels.
- (b) Controleer met behulp van waarheidstabellen of de argumentvorm geldig is of niet.

2. Vertalen en negatie (Predicatenlogica)

- (a) Vertaal de volgende zin met behulp van de aangegeven vertaalsleutels.

“Wie zijn pincode opschrijft of deze geeft aan iemand die niet te vertrouwen is, handelt niet verstandig.”

Pxy - de pincode van persoon x is y .

Sxy - persoon x schrijft y op.

$Gxyz$ - persoon x geeft y aan persoon z .

Vx - persoon x is te vertrouwen.

Dx - persoon x handelt verstandig.

- (b) Geef de negatie van volgende formule:

$$\exists x \forall y (x \leq y \wedge y \leq 2x \Rightarrow \neg Py).$$

Als “ Px ” staat voor “ x is een priemgetal”, geef dan een Nederlandse volzin die de gemaakte negatie korrekt weergeeft.

3. Informele bewijzen en strategie

Zij P het universum van alle personen en bekijk volgende uitspraken.

- (I) $\forall x (E x \rightarrow \forall y (G xy \rightarrow x = y))$.
- (II) $E(jan) \wedge E(piet)$.
- (III) $jan \neq piet$.
- (IV) Regels m.b.t. gelijkheid, met name: $\forall x \forall y \forall z (x = y \wedge x = z \rightarrow y = z)$.
- (a) We beschikken over de vertaalsleutel
 - $E x$ - x is een egoïst
 - $G xy$ - x geeft om y .

Geef hiermee een goede nederlandse vertaling van de zin (I).

(b) Zet om in formele taal: de zin

(V) Wie om alle egoïsten geeft, is zelf geen egoïst.

(c) Geef een uitgewerkte strategie (een schematische top-down analyse) voor een bewijs van de bewering $I \wedge II \wedge III \wedge IV \rightarrow V$.

(d) Geef tenslotte een bewijs volgens deze strategie van de uitspraak in (c).

4. Ordening

Zij V de verzameling van alle cijfers 0 t/m 9, geordend volgens stijgende grootte. De ordeningsrelatie in V wordt voorgesteld met het symbool " $\leq$ ".

(a) Geef in symbolische vorm de uitspraak weer dat V totaal geordend is door de ordening $\leq$.

Zij $A \subseteq V^4$ de verzameling van alle viertallen (u, v, w, x) waarvoor $u + v \leq 2$ en $w + x \geq 16$.

(b) In dit onderdeel heeft V^4 de Cartesische ordening. Geef bij deze ordening alle maximale elementen van A . Geef het grootste element van A of leg uit waarom zo'n element er niet is.

(c) In dit onderdeel heeft V^4 de lexicografische ordening. Geef bij deze ordening alle maximale elementen van A . Geef het grootste element van A of leg uit waarom zo'n element er niet is.

5. Equivalentie en representanten

Zij $V := \mathbb{Z}^3$, en zij R volgende relatie in V .

$$\langle x_1, x_2, x_3 \rangle R \langle y_1, y_2, y_3 \rangle \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists c \in \mathbb{Z} \begin{cases} x_1 + c = y_1 \wedge \\ x_2 + c = y_2 \wedge \\ x_3 + c = y_3 \end{cases}$$

(a) Toon aan dat R een equivalentierelatie is in V .

(b) Geef de equivalentieklasse van $\langle 0, 0, 2 \rangle$ weer door (suggestie) van opsomming.

(c) Geef een beschrijving van een volledig representantensysteem voor R .

(d) Zij f de functie van type $V \rightarrow \mathbb{Z}$ met voorschrift

$$f \langle x_1, x_2, x_3 \rangle := \langle x_1 - x_2, x_1 - x_3 \rangle.$$

Toon aan dat $x R y \iff f(x) = f(y)$ voor alle x en alle y in V .

Geef hiermee een goede nederlandse vertaling van de zin (I).

(b) Zet om in formele taal: de zin

(V) Wie om alle egoïsten geeft, is zelf geen egoïst.

(c) Geef een uitgewerkte strategie (een schematische top-down analyse) voor een bewijs van de bewering $I \wedge II \wedge III \wedge IV \rightarrow V$.

(d) Geef tenslotte een bewijs volgens deze strategie van de uitspraak in (c).

4. Ordening

Zij V de verzameling van alle cijfers 0 t/m 9, geordend volgens stijgende grootte. De ordeningsrelatie in V wordt voorgesteld met het symbool " $\leq$ ".

(a) Geef in symbolische vorm de uitspraak weer dat V totaal geordend is door de ordening $\leq$.

Zij $A \subseteq V^4$ de verzameling van alle viertallen (u, v, w, x) waarvoor $u + v \leq 2$ en $w + x \geq 16$.

(b) In dit onderdeel heeft V^4 de Cartesische ordening. Geef bij deze ordening alle maximale elementen van A . Geef het grootste element van A of leg uit waarom zo'n element er niet is.

(c) In dit onderdeel heeft V^4 de lexicografische ordening. Geef bij deze ordening alle maximale elementen van A . Geef het grootste element van A of leg uit waarom zo'n element er niet is.

5. Equivalentie en representanten

Zij $V := \mathbb{Z}^3$, en zij R volgende relatie in V .

$$\langle x_1, x_2, x_3 \rangle R \langle y_1, y_2, y_3 \rangle \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists c \in \mathbb{Z} \begin{cases} x_1 + c = y_1 \wedge \\ x_2 + c = y_2 \wedge \\ x_3 + c = y_3 \end{cases}$$

(a) Toon aan dat R een equivalentierelatie is in V .

(b) Geef de equivalentieklasse van $\langle 0, 0, 2 \rangle$ weer door (suggestie) van opsomming.

(c) Geef een beschrijving van een volledig representantensysteem voor R .

(d) Zij f de functie van type $V \rightarrow \mathbb{Z}$ met voorschrift

$$f \langle x_1, x_2, x_3 \rangle := \langle x_1 - x_2, x_1 - x_3 \rangle.$$

Toon aan dat $x R y \iff fx = fy$ voor alle x en alle y in V .

6. Functies

Zij G de verzameling van alle gehele getallen $x \geq 1$ (decimale schrijfwijze zonder "kopnullen", d.w.z. zonder nullen vooraan). We bekijken volgende functies.

$omkeer : G \rightarrow G$, $omkeer(x) =$ het getal x achterstevoren geschreven met weglaten van eventuele kopnullen.

$extra : G \rightarrow G$, $extra(x) =$ x met het meest linkse cijfer achteraan gecopiëerd

$rond(x) : G \rightarrow G$, $rond(x) =$ x met het laatste cijfer vervangen door een 0.

$tiental(x) : G \rightarrow G$, $tiental(x) =$ het getal x met een 0 achteraan toegevoegd.

(Bv.: $omkeer(910) = 19$, $extra(107) = 1071$, $rond(1998) = 1990$, en $tiental(21) = 210$.)

- Wat bedoelt men met "definitiegebied van een functie" en met "waardengebied van een functie"?
- Geef een precieze beschrijving van het definitiegebied van de functie $rond$ en van het waardengebied van de functie $tiental$.
- Welke van de vier gegeven functies zijn één-één en welke zijn véél-één? Geef ingeval van een 1-1 functie ook het voorschrift voor de inverse.
- Geef een (zo eenvoudig mogelijk) functievoorschrift voor elk van de samengestelde functies

$tiental \circ rond$, $rond \circ tiental$, $omkeer \circ rond \circ extra$.

Normering:

1	(a) 4	2	(a) 6	3	(a) 4	4	(a) 3	5	(a) 5	6	(a) 2
	(b) 8		(b) 6		(b) 4		(b) 6		(b) 2		(b) 3
					(c) 6		(c) 6		(c) 5		(c) 5
					(d) 4				(d) 6		(d) 5
12		12		18		15		18		15	

Totaal = 90.

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Totaal}}{10} + 1.$$