

1. Propositielogika

- (a) Laat zien door middel van waarheidstabellen dat

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r.$$

- (b) Gebruik logische equivalentie “ $\equiv$ ” en negatietechniek om in volgende uitdrukking de negatiesymbolen zo ver mogelijk naar binnen te werken.

$$\neg((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)).$$

- (c) Laat p staan voor “het regent” en q voor “het is bewolkt”. Hoe vertaalt U de uitgewerkte formule uit (b)? Zoek tevens de meest beknopte vertaling (deze hoeft geen letterlijke vertaling te zijn).

2. Geschakeld redeneren (Propositielogica)

We beschikken over volgende gegevens, geformuleerd als proposities. De onderlijnde woorden kunnen worden gebruikt als trefwoord om een propositie af te korten.

- * Een college is interessant enkel en alleen als het leuk is en er toepassingen aan de orde komen.
- * Een college is leuk als het in een rustig tempo gaat en een goed handboek wordt gebruikt.
- * Een informatica-onderwerp is een toepassing.
- * Programmeren en databanken zijn informatica-onderwerpen.
- * Een grap op z'n tijd maakt een college leuk.
- * Taalkunde is geen informatica-onderwerp maar wel een toepassing.
- * Logica is leuk en de onderwerpen databanken en taalkunde komen er aan de orde.

- (a) Geef met behulp van de onderlijnde trefwoorden, een precieze propositielogische vertaling van de gegevens.
- (b) Geef met kruisje in betreffende kolom aan of volgende colleges (met bijhorende gegevens) ja dan nee interessant zijn. Het is mogelijk dat de verstrekte informatie geen beslissing toelaat. Dan zet U een kruisje in de kolom “onbepaald”. U hoeft geen toelichting te geven.

College:	Gegevens:	ja	nee	onbepaald
X_1	grappen, handboek, taalkunde			
X_2	rustig, databanken, geen grappen			
X_3	leuk, handboek			
X_4	logica			
X_5	geen toepassingen, wel grappen, handboek			

3. Predicatenlogica en vertaling

- (a) Geef de negatie van volgende formule, waarbij de negatiesymbolen zo ver mogelijk naar binnen zijn gewerkt.

$$\forall x \forall y ((Sx \wedge Dy) \rightarrow (Vy \vee Cxy)).$$

- (b) Gegeven zijn twee verzamelingen *Studenten* en *Dagen* (met voor de hand liggende elementen. Laat Sx betekenen: $x \in \text{Studenten}$ en laat Dy betekenen: $y \in \text{Dagen}$. Geef nu een omzetting van de formule uit (a) naar een formule met beperkte kwantoren " $\forall x \in \text{Studenten}$ " en " $\forall y \in \text{Dagen}$ ".
- (c) Vertaal de formule uit (a) (**niet** de ontkenning) in goed Nederlands met behulp van volgende vertaalsleutel.

Sx - x is student

Dx - x is een dag

Vx - x is vrij

Cxy - x volgt college op y

4. Equivalentierelaties en bewijzen

- (a) Zij R een relatie in een verzameling A . Leg uit wat het betekent dat R een equivalentierelatie is. Geef tevens een formele vertaling in predicatenlogica van je definitie.
- (b) Beschrijf in woorden wat men bedoelt met: de equivalentieklasse van het element $a \in A$ m.b.t. de equivalentierelatie R .
- (c) **Gegeven:** de equivalentieklasse van a en van b hebben een punt gemeenschappelijk.
Bewijs: aRb .
- (d) **Gegeven:** aRb .
Bewijs: de equivalentieklasse van a is gelijk aan de equivalentieklasse van b .

5. Functies

In het kader van de Europese eenmaking dienen mettertijd de kentekens van auto's in alle lidstaten te worden geuniformiseerd. Lidstaten worden verzocht na te denken over functies die hun type van kenteken omzet in een ander type van kenteken, namelijk: 4 letters gevolgd door 3 cijfers. De verzameling van dergelijke kentekens noemen we EU_Kentekens. Hier volgen enkele denkproeven.

- (a) De verzameling NL_Kentekens bestaat uit **alle** combinaties van type

$LL LL CC$, of, $LL CC LL$, of, $CC LL LL$,

waar "L" staat voor (hoofd)letter en "C" voor cijfer. De functie f_{NL} kent aan een kenteken toe: de reeks met de vier letters, gevolgd door het oude 2-cijferige getal, geschreven als driecijferig met een '0' vooraan, en met hierbij opgeteld: 100, als het cijferblok in het midden stond, en 200 als het cijferblok rechts stond. Bv.: $f_{NL}(12ABCD) = ABCD 012$ en $f_{NL}(AB 12CD) = ABCD 112$. Is deze functie een-een of veel-een? Licht toe.

- (b) De verzameling B_Kentekens bestaat uit alle combinaties van type $LLL CCC$. Hier wordt volgende functie voorgesteld. f_B voegt aan een kenteken vooraan de letter 'B' toe. Is deze functie een-een of veel-een? Licht toe.

- (c) (vervolg onderdelen (a) en (b)). Bekijk nu de functie

$$f_{NL+B} : NL_Kentekens \cup B_Kentekens \rightarrow EU_Kentekens$$

Het domein is dus de verzameling van alle NL-kentekens en alle B-kentekens. Het functie-voorschrift is: $f(x) = f_{NL}(x)$ als $x \in NL_Kentekens$ en $f(x) = f_B(x)$ als $x \in B_Kentekens$. Laat zien dat deze functie NIET een-een is.

- (d) (vervolg alle onderdelen) Gezien het resultaat in (c) grijpt een Europees ambtenaar in en stelt een nieuwe functie f_{NL}^{EU} voor, namelijk de samengestelde functie $g_{EU} \circ f_{NL}$. Hierbij is de functie $g_{EU} : EU_Kentekens \rightarrow EU_Kentekens$ als volgt beschreven. De eerste twee letters van een EU-kenteken worden elk omgezet in hun cijferwaarde (A=1 ..., Z=26), deze twee getallen worden opgeteld bij het 3 cijfergetal aan het eind (ontstaat een duizendtal dan wordt dit weggelaten), en de vrijgekomen plaatsen vooraan worden ingevuld in met de letters 'NL'. Bijvoorbeeld, $g_{EU}(ZZCD\ 212) = NLCD\ 264$.

- * Bereken $f_{NL}^{EU}(AABB\ 99)$.
- * Is de functie f_{NL}^{EU} een-een of veel-een? Licht toe.

6. Inductie en Recursie

- (a) Een rij reële getallen $(t_n)_{n=2}^{\infty}$ is als volgt recursief gedefiniëerd.

$$t_2 := 4; \quad t_{n+1} := t_n + 2n + 2 \quad (n \geq 2).$$

Bepaal de eerste vijf termen van de rij $(t_n)_{n=2}^{\infty}$.

- (b) (Vervolg onderdeel (a)). Bewijs met inductie dat $t_n = n^2 + n - 2$ voor alle $n \geq 2$.
- (c) Gegeven is een verzameling A met 4 punten en een binaire relatie R in A (in matrix-vorm):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Geef de matrix van de transitieve afsluiting van R .

Normering:

1	(a) 4	2	(a) 6	3	(a) 6	4	(a) 4	5	(a) 4	6	(a) 2
	(b) 4		(b) 8		(b) 6		(b) 4		(b) 4		(b) 6
	(c) 4				(c) 4		(c) 4		(c) 5		(c) 6
							(d) 4		(d) 5		
12		14		16		16		18		14	

Totaal = 90.

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Totaal}}{10} + 1.$$