

1. Argumentvormen en vertalen (Propositielogika)

Er is een virus ontdekt in het computersysteem. De systeembeheerder verdenkt een student en een buitenstaander. Verder onderzoek levert het volgende op. Het filebestand is niet aangetast. De student is erbij betrokken of de buitenstaander is erbij betrokken, mogelijk zijn ze samen betrokken. Als de student er alleen bij betrokken is, dan is het virus niet kwaadaardig. Is het virus kwaadaardig, dan is het filebestand aangetast en is de buitenstaander er alleen bij betrokken.

- Zet bovenstaande uitspraken om in propositielogische formules (Geef ook een vertaalsleutel voor de gebruikte afkortingen).
- De systeembeheerder besluit dat alleen de student erbij betrokken is. Controleer met behulp van waarheidstabellen of de gehanteerde argumentvorm geldig is of niet.

2. Vertalen en negatie (Predikatenlogika)

- Vertaal de volgende zin met behulp van de aangegeven vertaalsleutels.

"Ieder persoon die elke redenering kan begrijpen, is een natuurtalent of heeft logica gevolgd."

Px - x is een persoon.

Rx - x is een redenering.

Bxy - x kan y begrijpen.

Nx - x is een natuurtalent.

Lx - x heeft logica gevolgd.

- Werk de ontkenning van volgende uitspraak zover mogelijk uit, en zet de ontkenning vervolgens om in goed Nederlands met behulp van de aangegeven sleutels.

$\forall x (Dx \rightarrow \exists y (Sy \wedge \neg Vyx))$

Dx - x is een docent.

Sx - x is een student.

Vxy - x haalt voldoende bij y .

- Gegeven is de volgende evaluatie van het binaire predicaat V uit onderdeel (b). Het symbool "+" geeft een voldoende aan. Is de *gegeven* uitspraak uit (b) (*niet* de ontkenning) hier waar of onwaar? Antwoord volstaat.

student\docent	d_1	d_2	d_3	d_4
anja	+	-	+	+
bart	+	+	+	+
carl	-	+	+	-
dirk	+	+	-	+

3. Bewijzen en strategieën

In $\mathbb{Z}$ beschikken we over de binaire relatie “ x deelt y ” met voorschrift $\exists z, x \cdot z = y$. We beschikken verder over de gebruikelijke rekenregels in $\mathbb{Z}$ betreffende optelling en vermenigvuldiging. Gegeven zijn twee getallen $a, b \in \mathbb{Z}$ en de uitspraak

“voor alle gehele getallen x geldt:
als x zowel a als b deelt, dan deelt x ook $a+b$ ”.

- (a) Geef een uitgewerkte *strategie* voor een bewijs van deze uitspraak.
- (b) Geef nu een *bewijs* van de uitspraak volgens de aangegeven strategie.

4. Ordening

- (a) Gegeven is een verzameling V met deelverzameling A , een partiële ordening $\leq$ in V , en een element p van V . Geef in symbolische vorm de definitie van volgende noties:

- (i) p is het grootste element van A ;
- (ii) p is een maximaal element van A .

- (b) Neem nu voor V de verzameling $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ met de Cartesische ordening (uitgaande van de natuurlijke ordening op $\mathbb{Z}$), en voor A de deelverzameling

$$\{ \langle x, y \rangle : 1 \leq x, 1 \leq y, x+y \leq 5 \}.$$

Geef een volledige opsomming van alle elementen van A .

- (c) (vervolg onderdeel (b)). Heeft A een grootste element? Zo ja, geef dit element; zo niet, geef alle maximale elementen van A .
- (d) (vervolg onderdelen (b) en (c)). Heeft A een kleinste element? Zo ja, geef dit element; zo niet, geef alle minimale elementen van A .

5. Functies

Bij een nieuwe casino-attractie wordt een pc gebruikt die op het scherm een rij van drie dobbelsteenwaarden toont, bv. $\langle 4, 6, 2 \rangle$. Er zijn drie toetsen a, b, c die als volgt werken. Toets a hoogt de waarde van de eerste (meest linkse) dobbelsteen met één op (6 wordt weer 1). Toets b maakt de waarde van de eerste dobbelsteen gelijk aan de laagste van de drie getoonde waarden. Toets c plaatst de eerste dobbelsteen laatst. Bijvoorbeeld:

$$\langle 4, 6, 2 \rangle \xrightarrow{a} \langle 5, 6, 2 \rangle; \langle 4, 6, 2 \rangle \xrightarrow{b} \langle 2, 6, 2 \rangle; \langle 4, 6, 2 \rangle \xrightarrow{c} \langle 6, 2, 4 \rangle.$$

- (a) Welke reeks van maximaal 6 toetsaanslagen, weergegeven als een samenstelling van functies met de “bolletje” notatie “ $f \circ g$ ”, zet $\langle 1, 2, 4 \rangle$ om in $\langle 1, 1, 3 \rangle$? Als zo’n reeks niet kan, leg dan uit waarom.
- (b) Welke van de toetsen zijn een-een functies en welke zijn veel-een functies? Licht je antwoord toe.
- (c) Geef in woorden het functievoorschrift voor elk van de samengestelde functies

$$b \circ c; c \circ b.$$

- (d) Gegeven het tripel $\langle 2, 5, 3 \rangle$, bepaal de waarde van de inverse van volgende functies (indien deze inverse bestaat):

$$c \circ a \circ a; a \circ c \circ a.$$

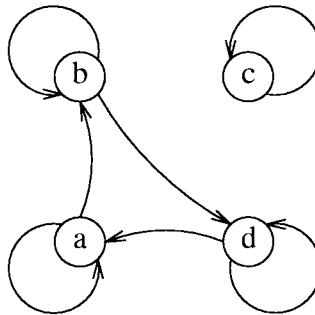
6. Inductie en Recursie

- (a) Een rij reële getallen $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ is als volgt recursief gedefiniëerd.

$$t_1 := 2; \quad t_{n+1} := 2t_n - 2n + 3 \quad (n \geq 1).$$

Bepaal de eerste vijf termen van de rij $(t_n)_{n=1}^{\infty}$.

- (b) (Vervolg onderdeel (a)). Bewijs met inductie dat $t_n = 2^{n-1} + 2n - 1$ voor alle $n \geq 1$.
N.B.: $2^0 = 1$.
- (c) Gegeven is volgende binaire relatie R op 4 punten a, b, c, d :



Teken de gerichte graaf van de transitieve afsluiting van R .

Normering:

1	(a) 3 (b) 4	2	(a) 2 (b) 3 (c) 2	3	(a) 3 (b) 4	4	(a) 3 (b) 1 (c) 2 (d) 2	5	(a) 2 (b) 2 (c) 2 (d) 2	6	(a) 2 (b) 3 (c) 3
	7		7		7		8		8		8

Totaal = 45.

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Totaal}}{5} + 1.$$