

Dit tentamen bestaat uit 3 pagina's; er zijn 9 opgaven.

Bij elke opgave is het aantal te behalen punten per onderdeel vermeld. Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.

Opgave 1. (6 + 6 punten)

- (a) Onderzoek met een waarheidstafel de geldigheid van de semantische implicatie

$$(p \vee q) \rightarrow q \models \neg p$$

- (b) Geef alleen gebruikmakend van de propositieletter p drie formules: een tautologie, een contradictie en een contingentie.

Opgave 2. (10 punten)

Schrijf de volgende tien formules in kolommen, zodanig dat alle formules in één kolom onderling semantisch equivalent zijn, en formules in verschillende kolommen juist niet. (Voor deze opgave telt alleen het antwoord, motivering is niet vereist.)

$$p \rightarrow q, (p \vee q) \rightarrow q, p \vee \neg p, \neg p \rightarrow p, p \rightarrow (p \vee q), \neg\neg p, p, \neg q, \\ q \rightarrow \neg q, (p \vee q) \rightarrow \neg q, (p \vee p) \rightarrow q$$

Opgave 3. (4 + 4 + 4 punten)

Beschouw de volgende drie uitspraken over een propositiologische formule φ .

1. " φ is satisfiable."
2. " $\neg\varphi$ is een contradictie."
3. " φ is geen contradictie."

Geef voor elk tweetal van deze uitspraken aan of ze onderling equivalent zijn. Dus er zijn drie vragen:

- (a) Geldt $1 \Leftrightarrow 2$?
- (b) Geldt $1 \Leftrightarrow 3$?
- (c) Geldt $2 \Leftrightarrow 3$?

Motiveer je antwoorden kort. Als de equivalentie niet geldt, geef dan een concrete formule waar dat uit blijkt.

Opgave 4. (4 + 6 + 4 + 4 punten)

Gegeven is de boolese functie

$$f(x, y, z) = x + y \cdot \bar{z}$$

- (a) Geef een BDT (binary decision tree) voor $f(x, y, z)$.
- (b) Reduceer deze BDT met de regels C1–3 tot een reduced BDD, laat alle stappen zien.
- (c) Geef ook een gereduceerde OBDD voor de functie $f \cdot z$ met variablenor-
dening $[x, y, z]$.
- (d) Geef een gereduceerde OBDD met variablenor-
dening $[x, y, z, w]$ voor de
boolese functie $g(x, y, z, w)$ die waar is als een even aantal variabelen de
waarde 1 heeft, en anders onwaar.

Opgave 5. (3 + 4 + 4 punten)

- (a) Geef het op het college (en in Huth & Ryan) behandelde criterium om te
bepalen of een conjunctieve normaalvorm (CNV) een tautologie is.
- (b) Bepaal een CNV voor de formule $(p \rightarrow \neg q) \vee ((r \wedge \neg p) \rightarrow q)$. Laat daarbij
zien hoe je aan je antwoord komt. Bepaal vervolgens met het criterium
uit (a) of deze formule een tautologie is.
- (c) Dezelfde vraag voor de formule $(p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$.

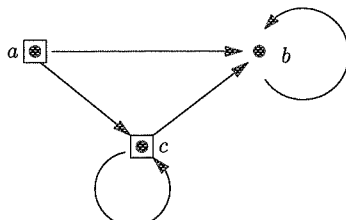
Opgave 6. (8 + 4 punten)

Op het eiland van leugenaars en waarheidssprekers is iedere bewoner een leu-
genaar of een waarheidsspreker. Op het eiland kom je a en b tegen en a zegt:
“Als b een leugenaar is, dan ben ik het ook.”

- (a) Is a een leugenaar of een waarheidsspreker? Op grond van welke geldige
semantische implicatie kun je deze conclusie trekken?
- (b) Wat kun je concluderen over b ? (Beredeneer je antwoord.)

Opgave 7. (6 punten)

Geef van de onderstaande predikaatlogische formules aan of ze waar zijn in de figuur. Interpreteer hierbij Ax als “om het punt x staat een vierkantje”, en Rxy als: “er loopt een pijl van x naar y ”. (Geef alleen de antwoorden, waar of onwaar.)



- | | |
|--|---|
| (a) $\forall x(Ax \wedge \exists y(Rxy \wedge Ryy))$ | (b) $\forall x(Ax \rightarrow \exists y(Rxy \wedge Ryy))$ |
| (c) $\exists x\forall yRxy$ | (d) $\exists x\forall y(Rxy \rightarrow Ay)$ |
| (e) $\forall x(Rxx \vee Ax)$ | (f) $\exists x\exists y(Rxy \wedge \neg Ax)$ |

Opgave 8. (3 + 3 + 3 punten)

- Wat betekent het te zeggen dat dat een stelsel connectieven *functioneel volledig* (of *adekwaat*) is?
- Is het stelsel $\{\neg, \wedge\}$ adekwaat?
- Is het stelsel $\{\vee, \wedge\}$ adekwaat?

Geef voor je antwoorden op (b) en (c) korte motiveringen.