

Dit tentamen bestaat uit 3 pagina's; er zijn 9 opgaven.

Bij elke opgave is het aantal te behalen punten per onderdeel vermeld. Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.

Opgave 1. (5 + 5 + 6 punten)

- (a) Onderzoek met een waarheidstafel de geldigheid van de semantische implicatie

$$(p \rightarrow q) \rightarrow q \models q$$

- (b) Bewijs of weerleg de volgende bewering (weerlegging aan de hand van concrete formules φ, ψ):

$$\text{“ als } \models \varphi \vee \psi, \text{ dan } \models \varphi \text{ of } \models \psi \text{ ”}$$

- (c) Schrijf de volgende twaalf formules in kolommen, zodanig dat alle formules in één kolom onderling semantisch equivalent zijn, en formules in verschillende kolommen juist niet. (Voor deze opgave telt alleen het antwoord, motivering is niet vereist.)

$$q \rightarrow \neg p, (p \vee \neg q) \rightarrow \neg q, p \vee \neg p, \neg p \rightarrow p, \neg(p \rightarrow p), p \rightarrow (p \vee q), \\ \neg \neg p, p, \neg q, (p \vee q) \rightarrow \neg q, p \wedge \neg p, p \rightarrow \neg q$$

Opgave 2. (4 + 6 + 4 punten)

Gegeven is de boolse functie

$$f(x, y, z) = x \cdot \bar{z} + y \cdot z$$

- (a) Geef een BDT (binary decision tree) voor $f(x, y, z)$.
- (b) Reduceer deze BDT met de regels C1-3 tot een reduced BDD, laat alle stappen zien.
- (c) Geef ook een BDD voor de functie $\bar{f} \cdot y$.

Opgave 3. (2 + 4 + 4 punten)

- (a) Geef het op het college (en in Huth & Ryan) behandelde criterium om te bepalen of een conjunctieve normaalvorm (CNV) een tautologie is.
- (b) Bepaal een CNV voor de formule $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$ – laat daarbij zien hoe je aan je antwoord komt – en bepaal met het criterium uit (a) of deze formule een tautologie is.
- (c) Dezelfde vraag voor de formule $(p \rightarrow q) \vee (p \wedge r)$.

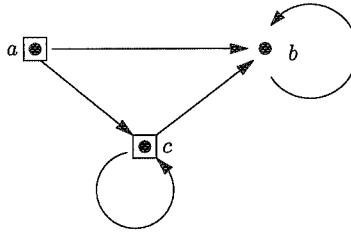
Opgave 4. (7 + 3 punten)

Op het eiland van leugenaars en waarheidssprekers is iedere bewoner een leugenaar of een waarheidsspreker. Op het eiland kom je a en b tegen en a zegt: "Het is niet zo dat b en ik allebei waarheidssprekers zijn." Je wilt graag weten of a en b leugenaars of waarheidssprekers zijn.

- (a) Geef deze vraag weer als satisfiability probleem in de propositielogica.
- (b) Los het probleem op: wat is a en wat is b ?

Opgave 5. (6 punten)

Geef van de onderstaande predikaatlogische formules aan of ze waar zijn in de figuur. Interpreteer hierbij Ax als "om het punt x staat een vierkantje", en Rxy als: "er loopt een pijl van x naar y ". (Geef alleen de antwoorden, waar of onwaar.)



- (a) $\exists x \forall y Rxy$
- (b) $\exists x \forall y Ryx$
- (c) $\forall x (Rxx \vee \neg Ax)$
- (d) $\exists x (Ax \wedge \neg \exists y Ryx)$
- (e) $\exists y \forall x (Rxy \rightarrow Ax)$
- (f) $\exists x \exists y (Rxy \wedge \neg Ax \wedge \neg Ay)$

Opgave 6. (4 + 4 punten)

Vertaal met de gegeven vertaalsleutel de onderstaande zinnen in de taal van de predikatenlogica.

Mx:	x is een machinist	Tx:	x is een trein
Bxy:	x bestuurt y	Rx:	x rijdt
Sx:	x staakt		

- (a) Elke trein die rijdt wordt door een machinist bestuurd.
- (b) Als tenminste één machinist staakt, dan rijdt er geen enkele trein.

Opgave 7. (6 punten)

Pas het algoritme voor satisfiability van Horn formules toe op de formule

$$(\top \rightarrow q) \wedge (\top \rightarrow s) \wedge (w \rightarrow \perp) \wedge (p \wedge q \wedge s \rightarrow \perp) \wedge (v \rightarrow s) \wedge (\top \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow p)$$

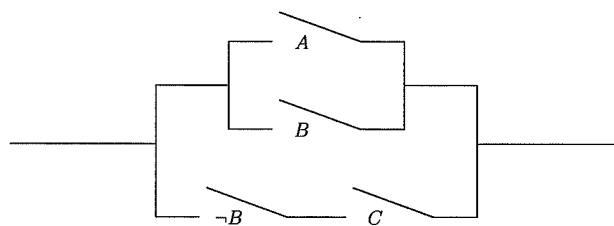
Als volgt dat de formule satisfiable is, geef dan een valuatie die de formule waar maakt.

Opgave 8. (3 + 7 punten)

- (a) Schrijf *negen* als binair getal.
 - (b) Geef een logisch circuit dat als input een binair getal van precies vier digits neemt, en dat 1 ('true') oplevert als de input *negen* representeert, en dat 0 ('false') oplevert in alle andere gevallen.
- NB: er zijn dus vier inputs en één output.

Opgave 9. (5 + 5 punten)

Beschouw het volgende switching circuit:



- (a) Welke formule wordt door dit switching circuit gerepresenteerd?
- (b) Vereenvoudig het switching circuit zoveel mogelijk.

