

Tentamen Toegepaste Logica

29 maart 1999

Opgave 1.

- a. Geef, in natuurlijke deductie van minimale logica, een bewijs van de formule $(A \rightarrow (C \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow (C \rightarrow D) \rightarrow B \rightarrow D$ dat een detour bevat en dat geen niet-ingetrokken assumpties bevat.
(5 punten)
- b. Beschouw $(A \rightarrow (C \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow (C \rightarrow D) \rightarrow B \rightarrow D$ als een simpel type. Geef de lambda-term en de type afleiding corresponderend met het bewijs uit het antwoord op vraag 1a (in simpel getypeerde λ -calculus à la Church).
(5 punten)
- c. Beta-reduceer de lambda-term gevonden in 1b naar β -normaalkvorm.
(2 punten)
- d. Geef het bewijs in natuurlijke deductie dat correspondeert met de lambda-term in β -normaalkvorm gevonden in 1c.
(5 punten)

Opgave 2.

Deze opgave betreft simpel getypeerde λ -calculus à la Curry.

- a. Formuleer het typeerbaarheidsprobleem.
(3 punten)
- b. Gebruik het typeringsalgoritme om te bepalen of de lambda-term $\lambda x.(\lambda y.xy)(\lambda z.z)$ typeerbaar is, en geef zo mogelijk het principal type.
(5 punten)
- c. Gebruik het typeringsalgoritme om te bepalen of de lambda-term $\lambda y.(\lambda x.xy)y$ typeerbaar is, en geef zo mogelijk het principal type.
(5 punten)

Opgave 3.

- Geef de reductieregels voor de combinatoren S , K en I .
(3 punten)
- Reduceer de CL-term $S(K(SII)I)IK$ naar normaalvorm.
(3 punten)
- Geef de vertaling van de CL-term $S(K(SII)I)IK$ in λ -calculus.
(3 punten)
- Beta-reduceer de in 3c gevonden λ -term naar β -normaalvorm.
(3 punten)

Opgave 4.

- Gebruik de fixpoint-combinator $Y = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$ om te laten zien dat elke term een fixpoint heeft, in ongetypeerde lambda-calculus.
(5 punten)
- Is de fixpoint-combinator Y typeerbaar in simpel getypeerde lambda-calculus? Leg uit waarom (niet).
(3 punten)
- We definiëren een natuurlijk getal n in Gödel's T als $s^n(\mathbf{z})$, met

$$\frac{n : \mathbf{nat}}{\mathbf{z} : \mathbf{nat} \quad s(n) : \mathbf{nat}}$$

De recursor voor natuurlijke getallen $\mathbf{r}_{\mathbf{nat}}$ heeft als typeringsregel

$$\frac{n : \mathbf{nat} \quad F : \mathbf{nat} \rightarrow \mathbf{nat} \rightarrow \mathbf{nat} \quad m : \mathbf{nat}}{\mathbf{r}_{\mathbf{nat}}(n, F, m) : \mathbf{nat}}$$

en reductieregels

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\mathbf{nat}}(n, F, \mathbf{z}) &\rightarrow n, \\ \mathbf{r}_{\mathbf{nat}}(n, F, s(p)) &\rightarrow F \mathbf{r}_{\mathbf{nat}}(n, F, p). \end{aligned}$$

Geef de twee vergelijkingen waar een term **plus** aan moet voldoen om op een zinvolle manier optelling van natuurlijke getallen te definiëren.

(4 punten)

- Laat zien dat de term **plus** in Gödel's T gedefinieerd door

$$\mathbf{plus} = \lambda m : \mathbf{nat}. \lambda n : \mathbf{nat}. \mathbf{r}_{\mathbf{nat}}(n, \lambda x : \mathbf{nat}. \lambda y : \mathbf{nat}. s(x), m)$$

aan de twee vergelijkingen uit 4c voldoet.

(N.B. Verander eerst zo nodig de volgorde van de argumenten van het antwoord in 4c, maar geef dat dan wel expliciet aan.)

(6 punten)

Opgave 5.

- a. Een fragment van lambda-calculus met afhankelijke types (λP) correspondeert met een logica. Welke logica is dat?
(3 punten)
- b. Geef een voorbeeld van het gebruik van afhankelijke types.
(4 punten)
- c. Geef de applicatieregels van λP .
(3 punten)
- d. Geef de typeafleiding in λP van de term
 $\lambda w : \Pi x : 0.A(x).wN : \Pi x : 0.A(x) \rightarrow A(N)$.
(5 punten)

Opgave 6.

- a. Geef de instantie van de applicatieregels die laat zien hoe je de polymorfe identiteit kunt gebruiken om de identiteit op type **nat** te maken. Gebruik de officiële notatie van $\lambda P2$ à la Church.
(5 punten)
- b. We schrijven $A \rightarrow B$ in plaats van $\Pi x : A.B$ als x niet vrij voorkomt in B . We definiëren het type **natlist**, en de termen **nil** en **cons** als volgt:

$$\begin{aligned}\mathbf{natlist} &= \Pi a : \star. a \rightarrow (\mathbf{nat} \rightarrow a \rightarrow a) \rightarrow a \\ \mathbf{nil} &= \lambda a : \star. \lambda x : a. \lambda y : \mathbf{nat} \rightarrow a \rightarrow a. x \\ \mathbf{cons} \ M \ L &= \lambda a : \star. \lambda x : a. \lambda y : \mathbf{nat} \rightarrow a \rightarrow a. y \ M \ (L \ a \ x \ y)\end{aligned}$$

met $M : \mathbf{nat}$ en $L : \mathbf{natlist}$.

Welk type heeft de term **cons** 2(**cons** 1 **nil**) met $1 : \mathbf{nat}$ en $2 : \mathbf{nat}$? Leg uit waarom.

- (5 punten)
- c. Beta-reduceer de term **cons** 2(**cons** 1 **nil**) met definities als in vraag 6b naar normaalvorm.
(5 punten)

Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.