

Tentamen Toegepaste Logica

13 januari 1999

Opgave 1.

- a. Geef, in natuurlijke deductie van minimale logica, een bewijs van de formule $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow C$ dat een detour bevat en dat geen niet-ingetrokken assumpties bevat.
(5 punten)
- b. Beschouw $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow C$ als een simpel type. Geef de lambda-term en de type afleiding corresponderend met het bewijs uit het antwoord op vraag 1a (in simpel getypeerde λ -calculus à la Church).
(5 punten)
- c. Beta-reduceer de lambda-term gevonden in 1b naar β -normaalkvorm.
(2 punten)
- d. Geef het bewijs in natuurlijke deductie dat correspondeert met de lambda-term in β -normaalkvorm gevonden in 1c.
(5 punten)

Opgave 2.

Deze opgave betreft simpel getypeerde λ -calculus à la Curry.

- a. Formuleer het typeerbaarheidsprobleem.
(3 punten)
- b. Gebruik het typeringsalgoritme om te bepalen of de λ -term $\lambda x. xxx$ typeerbaar is, en geef zo mogelijk het principal type.
(5 punten)
- c. Gebruik het typeringsalgoritme om te bepalen of de λ -term $\lambda y. \lambda x. yxx$ typeerbaar is, en geef zo mogelijk het principal type.
(5 punten)

Opgave 3.

- a. Geef de reductieregel voor de combinator S van Combinatorische Logica.
(2 punten)
- b. Reduceer de CL-term $S(SI)Ix$ naar normaalvorm.
(4 punten)
- c. Geef de vertaling van de CL-term $S(SI)Ix$ in λ -calculus.
(5 punten)
- d. Beta-reduceer de in 3b gevonden λ -term naar naar β -normaalvorm.
(3 punten)
- e. Zijn er simpele types A en B met $S : A$ en $I : B$ zodanig dat de CL-term $S(SI)Ix$ typeerbaar is? Motiveer Uw antwoord.
(5 punten)

Opgave 4.

- a. Zij $A_+ = \lambda x. \lambda y. \lambda s. \lambda z. x s (y s z)$. We schrijven de Church numerals als c_n . Laat zien dat $A_+ c_n c_m =_\beta c_{n+m}$ voor alle natuurlijke getallen n en m .
(5 punten)
- b. Stel dat alle Church numerals een zeker (ongespecificeerd) type B hebben. Is het dan mogelijk de term $A_+ c_n c_m$ te typeren en waarom (niet)?
(N.B. Er wordt niet gevraagd om het typeringsalgoritme toe te passen.)
(5 punten)
- c. Formuleer het inhabitation (bewoondheid) probleem.
(3 punten)
- d. Met welk probleem in minimale logica correspondeert het inhabitation probleem (via het Curry-Howard-De Bruijn isomorfisme)?
(3 punten)
- e. Geef twee verschillende gesloten normaalvormen van type $(A \rightarrow A) \rightarrow A \rightarrow A$.
(4 punten)

Opgave 5.

- a. We schrijven $A(x)$ voor een formule die mogelijkwerwijs vrije voorkomens van de variabele x bevat, en $A(N)$ voor het resultaat van het vervangen van die vrije voorkomens van x door de term N .

Laat zien dat de formule $A \rightarrow \forall x.A$ een tautologie is in eerste-orde predikatenlogica.

(5 punten)

- b. Geef de type afleiding in λP (lambda-calculus met afhankelijke types) die precies correspondeert met het bewijs gevraagd in 5a.

(5 punten)

Opgave 6.

Deze opgave betreft λ -calculus met polymorfe types ($\lambda P2$). Zij **nat** het type van natuurlijke getallen.

- a. Geef de polymorfe identiteit als lambda-term en het bijbehorende type. Gebruik de officiële notatie van $\lambda P2$ à la Church.

(3 punten)

- b. Geef de instantie van de applicatieregels die laat zien hoe je de polymorfe identiteit kunt gebruiken om de identiteit op type **nat** te maken.

(3 punten)

- c. We schrijven $A \rightarrow B$ in plaats van $\Pi x : A. B$ als x niet vrij voorkomt in B . We definiëren het type **natlist**, en de termen **nil** en **cons** als volgt:

$$\begin{aligned}\mathbf{natlist} &= \Pi a : \star. a \rightarrow (\mathbf{nat} \rightarrow a \rightarrow a) \rightarrow a \\ \mathbf{nil} &= \lambda a : \star. \lambda x : a. \lambda y : \mathbf{nat} \rightarrow a \rightarrow a. x \\ \mathbf{cons} \ M \ L &= \lambda a : \star. \lambda x : a. \lambda y : \mathbf{nat} \rightarrow a \rightarrow a. y \ M \ (L \ a \ x \ y)\end{aligned}$$

met $M : \mathbf{nat}$ en $L : \mathbf{natlist}$.

Beta-reduceer de term **cons** 1(**cons** 2 **nil**) naar normaalvorm.

(5 punten)

Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.