

Vrije Universiteit, Faculteit Exacte Wetenschappen
Tweede deelttoets Logica voor W 17 december 2014, 12:00-14:00

Er zijn 4 vragen waarvoor je in totaal 27 punten kan halen. Het tentamencijfer wordt gegeven door $1 + \frac{\text{aantal punten}}{3}$. Gebruik van rekenmachine, boek of aantekeningen is niet toegestaan. Vermeld op ieder blad dat je inlevert je naam en je studentnummer. Geef niet alleen antwoorden, maar ook berekeningen. Na correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau van FEW.

Veel succes!

1. ($8 = 2+2+2+2$ punten)

Vertaal de volgende zinnen naar de taal van de predikatenlogica. Gebruik daarbij de volgende vertaalsleutel:

$N(x)$	$\sim$	x is een natuurlijk getal
$Z(x)$	$\sim$	x is een geheel getal
$x < y$	$\sim$	x is kleiner dan y
$S(x)$	$\sim$	de opvolger van x
1	$\sim$	het getal één

- a) Alle natuurlijke getallen zijn gehele getallen, maar niet andersom.
- b) Er bestaat geen grootste natuurlijke getal.
- c) Elk natuurlijk getal groter dan twee is niet gelijk aan één.
- d) Er zijn minder dan twee natuurlijke getallen kleiner dan twee.

2. ($3 = 1+2$ punten)

We bekijken een taal met twee functiesymbolen:

g (2-plaatsig)
 f (1-plaatsig)

en één relatiesymbool:

R (2-plaatsig).

Beschouw de structuur: $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}, \{(z_1, z_2) | z_2 \text{ is een veelvoud van } z_1\}, +, S \rangle$.

- a) Bereken $\llbracket f(f(g(x, x))) \rrbracket_{\mathfrak{A}, b}$, waar b een bedeling is die x op 3 afbeeldt.
(In andere woorden: geef de interpretatie van deze term in de gegeven structuur en onder de gegeven bedeling).
- b) Bereken $\llbracket \forall x(R(x, f(f(g(x, x)))) \rrbracket_{\mathfrak{A}}$.
(In andere woorden: geef de waarheidswaarde van deze formule in de gegeven structuur). Motiveer je antwoord.

3. ($8 = 4+4$ punten)

We bekijken een taal met twee 1-plaatsige predikaatsymbolen P en Q . Zijn de formules onder a) en b) tautologieën? Zo ja, toon dat aan. Zo niet, geef een tegenvoorbeeld.

- a) $(\exists x Px \wedge \exists x Qx) \rightarrow \exists x (Px \wedge Qx)$.

b) $\forall x Qx \rightarrow \exists x Qx$.

4. (8 = 4+4 punten)

Laat zien met behulp van natuurlijke deductie:

a) $\forall x(\neg Qx) \vdash \neg \exists x(Qx)$.

b) $\text{PEANO} \vdash S(S(0)) + S(0) = S(S(S(0)))$.