

# Tentamen Logica en Modelleren

19 december 2013

**Opgave 1.** (*4 + 4 + 4 punten*)

Leid met natuurlijke deductie af:

- (a)  $\neg p \wedge q, q \rightarrow r \vdash r \wedge \neg p$
- (b)  $p \rightarrow q, p \vee r \vdash q \vee r$
- (c)  $\neg(\neg p \rightarrow q) \vdash \neg p$

**Opgave 2.** (*3 + 2 + 3 + 3 punten*)

Beschouw de formule

$$\phi : \exists x(Rvx \wedge \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryz))$$

- (a) Teken de parse tree van de formule  $\phi$ .
- (b) Onderstreep de vrije variabelen in  $\phi$ .

Het model  $\mathcal{M}$  heeft als domein de verzameling  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ; het predikaatsymbool  $R$  wordt geïnterpreteerd als  $<$ .

- (c) Specificeer een look-up functie  $l$  voor de vrije variabelen van  $\phi$  zodanig dat  $\mathcal{M} \models_l \phi$ .
- (d) Specificeer een look-up functie  $l$  voor de vrije variabelen van  $\phi$  zodanig dat  $\mathcal{M} \not\models_l \phi$ .

**Opgave 3.** (*4 + 4 + 4 punten*)

Leid met natuurlijke deductie af:

- (a)  $\forall x(Px \rightarrow Qx), \exists x\neg Qx \vdash \exists x\neg Px$
- (b)  $\neg\exists x(Px \vee Qx) \vdash \forall x\neg Qx$
- (c)  $\forall x\forall y(x = y), Pa \vdash Pb$

**Opgave 4.** (4 + 4 punten)

De volgende semantische implicaties zijn ongeldig. Laat dit zien door het aangeven van tegenmodellen.

(a)  $\exists x \forall y Rxy \models \forall x \forall y (Rxy \vee Ryx)$

(b)  $\neg \exists x \forall y Rxy, \forall x Rxx \models \exists x \exists y (\neg Rxy \wedge \neg Ryx)$

**Opgave 5.** (4 + 4 + 4 punten)

Vertaal onderstaande zinnen in de taal van de predikatenlogica.

Domein mensen, vertaalsleutel:

a: Abe

c: Chris

r: Renske

Bxy: x bewondert y

Vxy: x is vriend van y

(a) Renske wordt door meerdere van haar vrienden bewonderd.

(b) Chris bewondert al zijn vrienden die zichzelf niet bewonderen.

(c) Abe bewondert niemand behalve zichzelf.

**Opgave 6.** (4 punten)

In een database van de post bevindt zich een tabel *Brieven* met kolommen *Id*, *Datum*, *Afzender*, *Geadresseerde*, waarin alle verzonden brieven worden geadministreerd.

In het relatiemodel representeren we deze tabel door het predikaatsymbool  $B$ , zodat  $B(x, y, z, w)$  uitdrukt:

“ $x$  is de identifier van een brief die op dag  $y$  door  $z$  aan  $w$  is verstuurd”

Anna wordt aangeduid met de constante  $a$ .

Geef een query in de vorm van een formule met vrije variabele  $x$  naar:

de dagen  $x$  waarop Anna meerdere brieven aan eenzelfde persoon heeft verstuurd.

**Opgave 7.** (8 + 4 punten)

(a) Ga voor de volgende twee verzamelingen formules na of ze consistent zijn. Leg je antwoorden kort uit, waar mogelijk met een model.

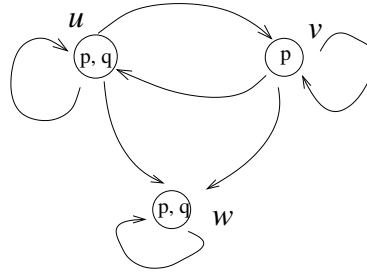
(i)  $\{\forall x \exists y Rxy, \forall x \forall y (Rxy \rightarrow \neg Ryx), \forall x \forall y \forall z (x = y \vee x = z \vee y = z)\}$

(ii)  $\{\forall x \exists y Rxy, \forall x \forall y (Rxy \rightarrow \neg Ryx),$   
 $\forall x \forall y \forall z \forall w (x = y \vee x = z \vee x = w \vee y = z \vee y = w \vee z = w)\}$

(b) Stel dat voor de formules  $\phi_1, \phi_2, \psi$  geldt dat  $\phi_1, \phi_2 \models \psi$  en  $\phi_1, \phi_2 \models \neg\psi$ . Zijn  $\phi_1, \phi_2$  dan consistent, inconsistent, of kun je er niets van zeggen? (Motiveer je antwoord.)

**Opgave 8.** (3 + 3 + 3 + 3 punten)

Gegeven is het Kripke model  $\mathcal{M} = (W, R, L)$  met als onderliggend frame  $\mathcal{F} = (W, R)$ , getekend in het volgende plaatje.



(a) Geef (zonder motivering) aan voor welke werelden  $x$  geldt:

(i)  $\mathcal{M}, x \models \Diamond \neg q$

(ii)  $\mathcal{M}, x \models \Box q$

(iii)  $\mathcal{M}, x \models \Box q \rightarrow \Diamond \neg p$

(b) Welke van de volgende frame-eigenschappen heeft  $\mathcal{F}$ ?

*reflexief, symmetrisch, transitief, voortzettend (serial), functioneel*

(c) Geef als dat mogelijk is een labelingfunctie  $L'$  op het frame  $\mathcal{F}$ , zodanig dat voor het Kripke-model  $\mathcal{M}' = (W, R, L')$  geldt:  $\mathcal{M}' \not\models \Diamond \neg p \rightarrow \neg p$ . Als zo'n  $L'$  niet bestaat geef dan kort aan waarom niet.

(d) Geef als dat mogelijk is een labelingfunctie  $L''$  op het frame  $\mathcal{F}$ , zodanig dat voor het Kripke-model  $\mathcal{M}'' = (W, R, L'')$  geldt:  $\mathcal{M}'' \not\models \Box \neg p \rightarrow \neg p$ . Als zo'n  $L''$  niet bestaat geef dan kort aan waarom niet.

**Opgave 9.** *(2 + 2 + 3 punten)*

- (a) Formuleer de Correctheidstelling voor de predikatenlogica.
- (b) Wanneer heet een tweetal formules  $\varphi_1, \varphi_2$  syntactisch consistent?
- (c) Gebruik de Correctheidstelling om te bewijzen dat uit de aanname dat er een model  $\mathcal{M}$  is zodat  $\mathcal{M} \models \varphi_1$  en  $\mathcal{M} \models \varphi_2$  volgt dat het tweetal formules  $\varphi_1, \varphi_2$  syntactisch consistent is.

*Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.*