

Tentamen Logica en Modelleren

26 oktober 2011

Dit tentamen bestaat uit 4 pagina's; er zijn 9 opgaven.

Per onderdeel is het aantal te behalen punten vermeld. Het tentamen-cijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.

Opgave 1. (5 + 5 punten)

Leid met natuurlijke deductie af:

- (a) $\neg(p \rightarrow q) \vdash \neg q$
- (b) $p \vee r, p \rightarrow q \vdash q \vee r$

Opgave 2. (4 + 4 + 4 punten)

Beschouw de formule ϕ : $\forall y \neg(Rxy \wedge Ryz) \wedge Rxx$

- (a) Teken de parse tree van ϕ .
- (b) Onderstreep in de formule ϕ alle vrije variabelen.
- (c) Bekijk het model $\mathcal{M}$ met als domein $A = \{1, 2, 3, 4\}$ en met $R^{\mathcal{M}} = <$. Geef voor de vrije variabele(n) van ϕ een look-up functie ℓ zodat $\mathcal{M} \models_{\ell} \phi$.

Opgave 3. (5 + 5 punten)

Leid met natuurlijke deductie af:

- (a) $\neg\exists x(Px \vee Qx) \vdash \forall x\neg Px$;
- (b) $\exists xRxx, \forall x\forall y(Rxy \rightarrow Py) \vdash \exists xPx$

Opgave 4. (5 + 5 punten)

De volgende semantische implicaties zijn ongeldig. Laat dit zien door het aangeven van tegenmodellen.

(a) $\exists x(Px \wedge Qx), \exists x(\neg Px \wedge \neg Qx) \models \forall x(Px \leftrightarrow Qx)$

(b) $\neg \exists x \forall y Rxy, \forall x Rxx \models \exists x \exists y (\neg Rxy \wedge \neg Ryx)$

Opgave 5. (4 + 4 + 4 punten)

Vertaal de onderstaande zinnen in de taal van de predikatenlogica. Gebruik daarbij de vertaalsleutel

Bxy: x is een broer van y

Wx: x werkt

Oxy: x is ouder dan y

Tx: x is thuis

a: Anna c: Chris

- (a) Anna is ouder dan al haar broers.
- (b) Anna heeft zowel oudere als jongere broers.
- (c) Eén van Anna's broers werkt en de rest is thuis.

[NB: Lees "de rest" als: haar andere broers.]

Opgave 6. (4 + 4 punten)

In een database van de post bevindt zich een tabel *Brieven* met kolommen *Id*, *Datum*, *Afzender*, *Geadresseerde*, waarin alle verzonden brieven worden geadministreerd.

In het relatiemodel representeren we deze tabel door het predikaatsymbool *B*, zodat $B(x, y, z, w)$ uitdrukt:

"x is de identifier van een brief die op dag y door z aan w is verstuurd"

Anna wordt aangeduid met de constante *a*.

Geef queries in de vorm van formules met een vrije variabele *x* naar:

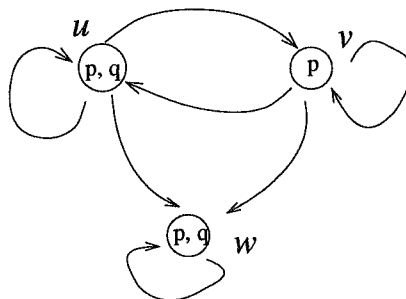
- (a) De dagen *x* waarop Anna meerdere brieven heeft verstuurd.

- (b) Dezelfde vraag, maar nu volgens het tuple-model.

Hierbij mag je gebruikmaken van het predikaat $Brief(x)$ dat uitdrukt dat x een 4-tuple is in de tabel *Brieven*, en verder de 1-plaatsige functiesymbolen Id , $Datum$, Afz en $Geadr$ (met de voor de hand liggende interpretaties).

Opgave 7. ($4 + 3 + 3 + 3$ punten)

Gegeven is het Kripke model $\mathcal{M} = (W, R, L)$ met als onderliggend frame $\mathcal{F} = (W, R)$, getekend in het volgende plaatje.



- (a) Ga na voor welke werelden x geldt:

- (i) $\mathcal{M}, x \models \Box(\neg p \vee q)$
- (ii) $\mathcal{M}, x \models \Box\neg p \vee \Box q$

Motivering is niet vereist.

- (b) Welke van de volgende frame-eigenschappen heeft $\mathcal{F}$?

reflexief, symmetrisch, transitief, voortzettend (serial),
functioneel

Motivering is niet vereist.

- (c) Geef als dat mogelijk is een labelingfunctie L' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}' = (W, R, L')$ geldt: $\mathcal{M}' \not\models p \rightarrow \Diamond p$. Als zo'n L' niet bestaat geef dan kort aan waarom niet.
- (d) Geef als dat mogelijk is een labelingfunctie L'' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}'' = (W, R, L'')$ geldt: $\mathcal{M}'' \not\models \Diamond p \rightarrow p$. Als zo'n L'' niet bestaat geef dan kort aan waarom niet.

Opgave 8. *(4 + 3 punten)*

We willen een programma P dat, werkend op integers, als effect heeft dat de waarden van de variabelen x en y verwisseld worden.

- (a) Specificeer dit gedrag met behulp van een Hoare triple.

[NB: Je hoeft het programmatje zelf niet te schrijven.]

- (b) Wat zijn *logische variabelen*? Zijn die nodig in onderdeel (a)? Motiveer je antwoord.

Opgave 9. *(4 + 4 punten)*

- (a) Beschouw de volgende instanties van het Post Correspondence Problem (PCP). Geef een oplossing, als die er is, of beredeneer dat er geen oplossing is.

(i) $\langle (11, 111), (001, 011), (000, 0011), (10, 0) \rangle$

(ii) $\langle (11, 111), (001, 011), (000, 0011), (10, 01) \rangle$

- (b) Bestaat er een algoritme dat voor een willekeurige formule ϕ uit de predikatenlogica beslist of $\models \phi$? Wat heeft PCP met deze vraag te maken?

Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.