

Tentamen Logica en Modelleren

6 januari 2011

Opgave 1. (5 + 5 punten)

Leid met natuurlijke deductie af:

- (a) $\neg(p \wedge q) \vdash p \rightarrow \neg q$
- (b) $p \vee (q \rightarrow r) \vdash (\neg p \wedge q) \rightarrow r$

Opgave 2. (3 + 3 + 4 punten)

Beschouw de formule ϕ : $\neg \exists x Ryx \wedge \forall y \neg Ryz$

- (a) Teken de parse tree van ϕ .
- (b) Onderstreep in de formule ϕ alle vrije variabelen.
- (c) Bekijk het model $\mathcal{M}$ met als domein $A = \{1, 2, 3, 4\}$ en met $R^{\mathcal{M}} = <$.
Geef voor de vrije variabele(n) van ϕ een look-up functie ℓ zodat $\mathcal{M} \models_{\ell} \phi$.

Opgave 3. (5 + 5 punten)

Leid met natuurlijke deductie af:

- (a) $\neg \exists x (Px \vee Qx) \vdash \forall x \neg Px$
- (b) $\forall x Px, \exists x Qx \vdash \exists x (Px \wedge Qx)$

Opgave 4. (5 + 5 punten)

De volgende semantische implicaties zijn ongeldig. Laat dit zien door het aangeven van tegenmodellen.

- (a) $\forall x Px, \exists x Qx \models \forall x (Px \wedge Qx)$
- (b) $\neg \exists x \forall y Rxy, \forall x Rxx \models \exists x \exists y (\neg Rxy \wedge \neg Ryx)$

Opgave 5. (4 + 4 + 4 punten)

Vertaal de onderstaande zinnen in de taal van de predikatenlogica. Gebruik daarbij de vertaalsleutel

Vxy: x is een vriend van y

Kxy: x is een kind van y

Gxy: x kent y

a: Anna

b: Barbara

c: Chris

- (a) Barbara kent sommige vrienden van Anna en sommige niet.
- (b) Anna kent alle vrienden van haar kinderen.
- (c) Anna heeft twee kinderen en daar kent Chris er één van.

Opgave 6. (4 + 4 punten)

In een database van de post bevindt zich een tabel *Brieven* met kolommen *Id*, *Datum*, *Afzender*, *Geadresseerde*, waarin alle verzonden brieven worden geadministreerd.

In het relatiemodel representeren we deze tabel door het predikaatsymbool B , zodat $B(x, y, z, w)$ uitdrukt:

“ x is de identifier van een brief die op dag y door z aan w is verstuurd”

Anna wordt aangeduid met de constante a .

Geef queries in de vorm van formules met een vrije variabele x naar:

- (a) de dagen x waarop Anna minstens twee brieven heeft verstuurd.
- (b) de personen x die aan elke andere persoon in de database wel eens een brief hebben gestuurd.

Opgave 7. (4 punten)

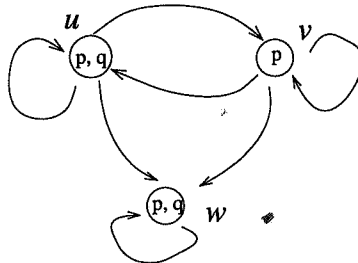
Bestaat er een model waarin de volgende predikaatlogische formule waar is?

$$\exists x \forall y (Rxy \leftrightarrow \neg Ryy)$$

Zo ja, geef een model, zo nee, beredeneer waarom niet.

Opgave 8. (4 + 4 + 3 + 3 punten)

Gegeven is het Kripke model $\mathcal{M} = (W, R, L)$ met als onderliggend frame $\mathcal{F} = (W, R)$, getekend in het volgende plaatje.



(a) Geef (zonder motivering) aan voor welke werelden x geldt:

- (i) $\mathcal{M}, x \models \Diamond \neg q$
- (ii) $\mathcal{M}, x \models \Box q$
- (iii) $\mathcal{M}, x \models \Box q \rightarrow \Diamond \neg p$

(b) Welke van de volgende frame-eigenschappen heeft $\mathcal{F}$?

reflexief, symmetrisch, transitief, voortzettend (serial), functioneel

- (c) Geef als dat mogelijk is een labelingfunctie L' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}' = (W, R, L')$ geldt: $\mathcal{M}' \not\models \Diamond \neg p \rightarrow \neg p$. Als zo'n L' niet bestaat geef dan kort aan waarom niet.
- (d) Geef als dat mogelijk is een labelingfunctie L'' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}'' = (W, R, L'')$ geldt: $\mathcal{M}'' \not\models \Box \neg p \rightarrow \neg p$. Als zo'n L'' niet bestaat geef dan kort aan waarom niet.

Opgave 9. (3 + 3 + 3 + 3 punten)

(a) Beschouw de volgende instantie van het Post Correspondence Problem (PCP). Geef een oplossing, of beredeneer dat er geen oplossing is.

$((00, 01), (0111, 1), (1, 11), (111, 1100))$

- (b) Wat bedoelen we als we zeggen dat de predikatenlogica *onbeslisbaar* is?
- (c) Wat is de relevantie van PCP voor de in (b) genoemde onbeslisbaarheid?
- (d) Is de propositielogica ook onbeslisbaar? Licht je antwoord toe.

Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.

