

Tentamen Logica en Modelleren

27 oktober 2010

Opgave 1. (6 + 6 punten)

Leid met natuurlijke deductie af:

- (a) $(\neg p \vee q) \rightarrow r, \neg(r \vee s) \vdash \neg q$
- (b) $\neg(p \wedge \neg r), q \vee \neg r, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$

Opgave 2. (4 + 4 + 4 punten)

Beschouw de formule $\phi: \forall x(Rxy \rightarrow \neg \exists y Ryx)$

- (a) Teken de parse tree van ϕ .
- (b) Onderstreep in de formule ϕ alle vrije variabelen.
- (b) Bekijk het model $\mathcal{M}$ met als domein $A = \{1, 2, 3, 4\}$ en met $R^{\mathcal{M}} = <$.
Geef voor de vrije variabele(n) van ϕ een look-up functie ℓ zodat $\mathcal{M} \models_{\ell} \phi$.

Opgave 3. (5 + 5 punten)

Leidt met natuurlijke deductie af:

- (a) $\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx$
- (b) $\forall xPx, \neg \exists x(Px \wedge Qx) \vdash \neg \exists xQx$

Opgave 4. (8 punten)

De volgende semantische implicatie is ongeldig. Laat dit zien door het aangeven van een tegenmodel.

$$\exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z) \models \exists x \exists y ((Px \leftrightarrow Qx) \wedge (Py \leftrightarrow Qy))$$

Opgave 5. (4 + 4 + 4 punten)

Vertaal de onderstaande zinnen in de taal van de predikatenlogica. Gebruik daarbij de vertaalsleutel

Kxy: x is een kind van y

Wx: x werkt

Gxy: x kent y

Tx: x is thuis

a: Anna

b: Barbara

c: Chris

- (a) Als al haar kinderen thuis zijn, dan werkt Anna niet.
- (b) Chris kent al Anna's kinderen.
- (c) Chris kent al Anna's kinderen, behalve Barbara.

Opgave 6. (4 + 4 punten)

In een database van de post bevindt zich een tabel *Brieven* met kolommen *Id*, *Datum*, *Afzender*, *Geadresseerde*, waarin alle verzonden brieven worden geadministreerd.

In het relatiemodel representeren we deze tabel door het predikaatsymbool B , zodat $B(x, y, z, w)$ uitdrukt:

“ x is de identifier van een brief die op dag y door z aan w is verstuurd”

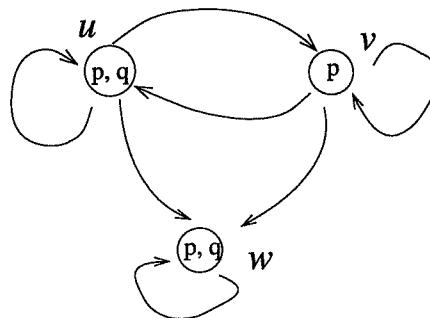
Anna wordt aangeduid met de constante a .

Geef queries in de vorm van formules met een vrije variabele x naar:

- (a) de dagen x waarop Anna geen brief heeft verstuurd.
- (b) de personen x die wel eens een brief aan Anna hebben gestuurd, maar aan niemand anders.

Opgave 7. (6 + 4 + 4 punten)

Gegeven is het Kripke model $\mathcal{M} = (W, R, L)$ met als onderliggend frame $\mathcal{F} = (W, R)$, getekend in het volgende plaatje.



(a) Ga na voor welke werelden x geldt:

(i) $\mathcal{M}, x \models \Diamond(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge q)$

(ii) $\mathcal{M}, x \models \Box q \rightarrow \Box(p \wedge q)$

Motivering is niet vereist.

(b) Geef als dat mogelijk is een labelingfunctie L' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}' = (W, R, L')$ geldt: $\mathcal{M}' \models \Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$. Als zo'n L' niet bestaat geef dan kort aan waarom niet.

(c) Geef als dat mogelijk is een labelingfunctie L'' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}'' = (W, R, L'')$ geldt: $\mathcal{M}'' \models \Diamond p \rightarrow \Box p$. Als zo'n L'' niet bestaat geef dan kort aan waarom niet.

Opgave 8. (6 punten)

We willen een programma P dat, werkend op integers, als effect heeft dat de outputwaarden van de variabelen y en z respectievelijk groter en kleiner zijn dan de inputwaarde van x , en dat de waarde van x onveranderd laat.

Specificeer dit gedrag met behulp van een Hoare triple.

[NB: Je hoeft het programmatje zelf niet te schrijven.]

Opgave 9. (4 + 4 punten)

(a) Beredeneer met behulp van de correctheidsstelling van de predikatenlogica dat een verzameling formules Σ die *syntactisch inconsistent* is, d.w.z., waarvoor geldt dat $\Sigma \vdash \perp$, geen model $\mathcal{M}$ heeft met $\mathcal{M} \models \Sigma$.

(b) We hebben een éénplaatsige predikaatletter P en constanten $c_1, c_2, c_3, \dots$, en definiëren daarmee de (oneindige) verzameling formules

$$\Sigma = \{\neg P(c_1), P(c_2) \rightarrow P(c_1), P(c_3) \rightarrow P(c_2), P(c_4) \rightarrow P(c_3), \dots\}$$

Is de verzameling formules Σ syntactisch consistent? Motiveer je antwoord.

Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.

