

Vrije Universiteit, Faculteit Exacte Wetenschappen

Tentamen Logica en Verzamelingenleer voor BWI 15 december 2009

Tentamencijfer = $1 + \frac{\text{totaal}}{10}$

Gebruik van rekenmachine of boek/dictaat is niet toegestaan.

Vermeld op ieder blad dat je inlevert je naam en je studentnummer.

Opgave 1. (10 punten)

In deze opgave zijn A, B, C deelverzamelingen van een universum V .

a) Maak Venn-diagrammen voor

$$(A \cup B) \setminus C \quad \text{en} \quad (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$$

en geef duidelijk aan welk gebied beschreven wordt.

b) Laat met behulp van een geschikt voorbeeld zien dat de twee boven genoemde verzamelingen in het algemeen verschillend zijn.

Opgave 2. (10 punten)

Onderzoek met behulp van waarheidstabellen of

$$(p \wedge q) \Rightarrow r \quad \text{en} \quad p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$$

logisch equivalent zijn.

Opgave 3. (10 punten)

Gegeven is een verzameling F van fruitsoorten en een verzameling V van vitamines. We schrijven $B(f, v)$ voor “fruit f bevat vitamine v ”.

Formuleer met kwantoren: “In ieder soort fruit zit een vitamine, maar geen fruitsoort bevat alle vitamines.”

Herschrijf de uitkomst zó, dat het negatie-teken “ $\neg$ ”, als je het nodig hebt, alleen voor $B(f, v)$ staat en nergens anders.

Opgave 4. (10 punten)

Binnen het universum $[-1, 1]$ worden voor $n = 1, 2, 3, \dots$ de intervallen $I_n = (-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1})$ gegeven.

Bepaal de verzamelingen

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n^c \quad \text{en} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^c.$$

Het antwoord volstaat.

Opgave 5. (10 punten)

Gegeven is de functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ met $f(x) = (2x, 6x - 7)$. Verder is $B \subset \mathbb{R}^2$ gegeven als $B = [0, 1] \times [1, 2]$. Bepaal $f^{-1}[B]$. Leg kort uit hoe je aan je antwoord komt.

Z.O.Z.

Opgave 6. (10 punten)

Gegeven zijn een functie $f : U \rightarrow V$ en een functie $g : V \rightarrow W$. Er is bekend dat de samengestelde functie $g \circ f : U \rightarrow W$ met $(g \circ f)(u) = g(f(u))$ injectief is.

- a) Bewijs dat f injectief is.
- b) Kun je ook concluderen dat g injectief is? Motiveer je antwoord kort.

Opgave 7. (10 punten)

Voor de rij $a_1, a_2, a_3, \dots$ van Fibonacci geldt $a_1 = a_2 = 1$ en $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ voor $n \geq 3$.

Toon met behulp van volledige inductie aan: voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$\sum_{k=1}^n (a_k)^2 = a_n a_{n+1}.$$

Opgave 8. (10 punten)

Toon met behulp van volledige inductie aan: voor elke $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 6$ geldt

$$7n < 2^n.$$

Opgave 9. (10 punten)

Er zijn 4 soorten kerstkoekjes te koop, van iedere soort zijn er voldoende. We kopen 15 stuks.

- a) Hoeveel mogelijkheden hebben we? Leg kort uit hoe je aan je antwoord komt.
- b) En als we van ieder soort tenminste 2 stuks willen kopen, hoeveel mogelijkheden hebben we dan? Leg ook hier kort uit hoe je aan je antwoord komt.