



Tentamen Logica en Verzamelingenleer voor BWI
maandag 9 februari 2009, 18.30 - 20.30 uur.

ELK ANTWOORD DIENT TE WORDEN BEARGUMENTEERD.

Er mogen geen hulpmiddelen als rekenmachines, mobiele telefoons, laptops en dergelijke gebruikt worden.

Het aantal te behalen punten is per onderdeel in de kantlijn vermeld. Het tentamencijfer wordt bepaald door bij het aantal behaalde punten vier op te tellen en vervolgens te delen door vier.

- (2) 1. (a) Maak met behulp van Venn-diagrammen aannemelijk dat de verzamelingen, beschreven door de formules

$$(A \cup B) \setminus (C \cap D) \quad \text{en} \quad (A \setminus C) \cup (B \setminus D),$$

in het algemeen verschillend zijn.

- (2) (b) Bewijs de bewering uit onderdeel (a) zonder Venn-diagrammen.

[AANWIJZING: in dit geval betekent dat het geven van voorbeelden waaruit het blijkt.]

- (3) (c) Bewijs de volgende bewering: voor verzamelingen A , B en C in een universum V geldt:

$$((A \cup C = B \cup C) \wedge (A \cap C = B \cap C)) \implies A = B.$$

- (2) (d) Binnen het universum $\mathbb{R}$ worden voor $n = 1, 2, \dots$ de intervallen $I_n = (\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$ gegeven. Bepaal de verzamelingen

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n^c \quad \text{en} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^c.$$

De antwoorden volstaan.

- (2) (e) [Dit onderdeel is een *bonusopgave*, dat je dus alleen moet maken als je nog tijd hebt]
Bewijs dat de verzameling $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ uit onderdeel (d) inderdaad gelijk is aan het door jou gegeven antwoord.

2. Gegeven is het volgende argument:

Als het KNMI droog weer voorspelt, dan ga ik fietsen of zwemmen. Ik ga alleen maar dan zwemmen als warm weer voorspeld wordt. Ik ga niet fietsen. Blijkbaar voorspelde het KNMI warm weer.

- (2) (a) Maak vier atomaire proposities “dr”, “f”, “z”, “wa” en zet het argument daarmee om naar zijn logische argumentvorm.
- (2) (b) Geef een bewijs als het argument klopt. Leg anders uit waarom het niet klopt.

- (2) 3. Gegeven is een verzameling studenten S en een verzameling collegedagen D . We formuleren het predicaat

$$L(s, d) := \text{"student } s \text{ komt op collegedag } d \text{ te laat"}.$$

Formuleer met kwantoren: "iedereen komt wel eens te laat, maar het komt niet voor dat iedereen te laat is". Het antwoord volstaat.

In je uitdrukking mag je alleen gebruik maken van de logische symbolen $\wedge$, $\vee$ en/of $\neg$ en van $\forall s \in S$, $\exists s \in S$, $\forall d \in D$ en/of $\exists d \in D$. Het eventuele negatie-teken moet hierbij direct voor het predicaat $L(s, d)$ staan. Er mogen dus geen kwantoren tussen $\neg$ en $L(s, d)$.

- (2) 4. Gegeven is de functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ met voorschrift $f(x, y) = x^2 - y^2$
- (2) (a) Is f surjectief? Bewijs dit netjes.
- (2) (b) Is f injectief? Bewijs ook dit netjes.
- (2) (c) Bepaal $f[A]$ als $A = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\{1\} \times \mathbb{R})$. Het antwoord volstaat.

- (2) 5. Bewijs dat voor functies $f : V \rightarrow W$ en deelverzamelingen A_1, A_2 van V geldt dat

$$f[A_1 \cap A_2] \subset f[A_1] \cap f[A_2].$$

- (4) 6. Bewijs dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$\sum_{k=2}^{2n+1} (3k-1) = n(6n+7).$$

- (3) 7. Bereken $\sum_{k=1}^{21} \binom{21}{k} (-5)^k 4^{21-k}$.

8. Ik heb 25 verschillende boeken.
- (2) (a) Op hoeveel manieren kan ik deze boeken naast elkaar op de boekenplank zetten?
Ik kan maar 12 boeken kwijt op mijn boekenplank.
- (2) (b) Hoeveel mogelijkheden zijn er nu voor het plaatsen van de boeken?
- (2) (c) En hoeveel mogelijkheden zijn er als ze op alfabetische volgorde moeten staan?

Overzicht: wetten en regels

Een aantal standaard wetten (propositielogica)

$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	associativiteit van $\wedge$
$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$	associativiteit van $\vee$
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	distributiviteit van $\wedge$ over $\vee$
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	distributiviteit van $\vee$ over $\wedge$
$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$	omzetting van implicatie
$(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	omzetting van equivalentie
$\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$	negatiewet voor implicatie
$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$	contrapositie

Standaard argumenten (courante regels van de propositielogica)

argumentvorm	naam	alternatieve naam
$p \Rightarrow q, p \therefore q$	modus ponens	' $\Rightarrow$ eliminatie
$p \Rightarrow q, \neg q \therefore \neg p$	modus tollens	
$p \vee q, \neg p \therefore q$	disjunctief syllogisme	
$p \vee q, \neg q \therefore p$	(variant)	
$p \therefore p \vee q$	disjunctieve toevoeging	'of' introductie)
$q \therefore p \vee q$	(variant)	
$p \vee q, p \Rightarrow r, q \Rightarrow r \therefore r$	dilemma regel	'of' eliminatie
$p, q \therefore p \wedge q$	conjunctieve toevoeging	'en' introductie)
$p \wedge q \therefore p$	conjunctieve simplificatie	'en' eliminatieregels
$p \wedge q \therefore q$	(variant)	
$p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \therefore p \Rightarrow r$	ketenregel	hypothetisch syllogisme
$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \therefore p \wedge q \Rightarrow r$	invoerregel	
$p \wedge q \Rightarrow r \therefore p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	uitvoerregel	
$p \Rightarrow q \therefore \neg q \Rightarrow \neg p$	contrapositieregels	
$p \Rightarrow q, p \Rightarrow r \therefore p \Rightarrow q \wedge r$	naamloos	
$p \Rightarrow r, q \Rightarrow r \therefore p \vee q \Rightarrow r$	naamloos	

