



Oefententamen Logica en Verzamelingenleer voor BWI
vrijdag 19 december 2008, 15.15 - 17.15 uur.

ELK ANTWOORD DIENT TE WORDEN BEARGUMENTEERD.

Er mogen geen hulpmiddelen als rekenmachines, mobiele telefoons, laptops en dergelijke gebruikt worden.

Het aantal te behalen punten is per onderdeel in de kantlijn vermeld. Het tentamencijfer wordt bepaald door bij het aantal behaalde punten vier op te tellen en vervolgens te delen door vier.

- (2) 1. (a) Maak een Venn-diagram voor elk van de formules

$$(A \cup B) \setminus (C \cup D) \quad \text{en} \quad (A \setminus C) \cup (B \setminus D)$$

en geef duidelijk aan welk gebied beschreven wordt door de formules.

- (2) (b) Zijn de twee bij onderdeel (a) gegeven verzamelingen gelijk? Geef een bewijs dat geen gebruik maakt van Venn-diagrammen.
- (2) (c) “Voor de verzamelingen A en B in een universum V geldt dat $A \not\subset B$.”
Maak met de atomaire proposities “ $x \in A$ ”, “ $x \in B$ ”, geschikte kwantoren (te kiezen uit $\forall x \in V$ en $\exists x \in V$) en voegwoorden (te kiezen uit “ $\wedge$ ”, “ $\vee$ ” en “ $\neg$ ”) een samengestelde uitspraak die dit uitdrukt.
- (3) (d) Binnen het universum $\mathbb{R}$ worden voor $n = 1, 2, \dots$ de intervallen $I_n = [\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$ gegeven. Bepaal de verzamelingen

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n^c \quad \text{en} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^c.$$

De antwoorden volstaan.

- (2) (e) [Dit onderdeel is een *bonusopgave*, die je dus alleen moet maken als je nog tijd hebt]
Bewijs dat de verzameling $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ uit onderdeel (d) inderdaad gelijk is aan het door jou gegeven antwoord.

2. Gegeven is het volgende argument:

Als de rockband niet kan spelen of het bier te laat geleverd wordt, dan kan het nieuwjaarsfeestje niet door gaan en is de organisator boos. Als het feestje niet door gaat, dan moet geld terugbetaald worden. Er wordt geen geld terugbetaald. Blijkbaar kan de rockband spelen.

- (2) (a) Maak vijf atomaire proposities “sp”, “bl”, “f”, “ob”, “gt” en zet het argument daarmee om naar zijn logische argumentvorm.
- (2) (b) Geef een bewijs als het argument klopt. Leg anders uit waarom het niet klopt.

3. Met een “kromme” in het platte vlak bedoelen we hier een (eventueel) gekromde lijn die je met een pen kunt tekenen. Hij mag oneindig lang zijn. Voorbeelden zijn rechte lijnen, parabolen, cirkels, ellipsen, grafieken van reëelwaardige functies waarvan het domein een deelverzameling van $\mathbb{R}$ is, etc. We formuleren het predicaat $K(x, y) :=$ “het punt (x, y) ligt op kromme K ”.

(2) (a) Voor een kromme K in $[-1, 1] \times \mathbb{R}$ geldt

$$\forall x \in [-1, 1], \exists y \in \mathbb{R} : K(x, y)$$

Is zo’n kromme de grafiek van een functie $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$? Leg uit!

(2) (b) Van een kromme K in $\mathbb{R}^2$ is gegeven

$$\exists z \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : (y \geq z \Rightarrow \neg K(x, y)).$$

Wat betekent dit voor de kromme K ?

4. Gegeven is de functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ met voorschrift $f(x) = (2x - 4, -x + 1)$

(2) (a) Is f surjectief? Bewijs dit netjes.

(2) (b) Is f injectief? Bewijs ook dit netjes.

(2) (c) Bepaal $f^{-1}[A]$ als $A = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$. Het antwoord volstaat.

5. Laat zien dat voor functies $f : V \rightarrow W$

(2) (a) de uitspraak “ $\forall A \subset V : (f(x) \in f[A] \Rightarrow x \in A)$ ” in het algemeen niet waar is.

(2) (b) de uitspraak “ f injectief $\Rightarrow (\forall A \subset V : f^{-1}[f[A]] \subset A)$ ” altijd waar is.

- (3) 6. Voor de rij $a_1, a_2, a_3, \dots$ van Fibonacci geldt $a_1 = 1, a_2 = 1$ en $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ voor $n \geq 3$. Toon aan: voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_{n+2} - 1.$$

7. We beschouwen de 10.000 getallen met vier cijfers (dus de getallen 0000, 0001, 0002 tot en met 9999). Beantwoord de volgende vragen. Een korte uitleg is gewenst.

(2) (a) Hoeveel getallen bevatten hooguit de cijfers 3, 5 en 8?

(2) (b) Van hoeveel getallen lopen de cijfers op in grootte (zoals 2458 en 6789)?

(2) (c) Van hoeveel getallen lopen de opeenvolgende cijfers niet af in grootte (zoals 2448 en 7777)?

Uitwerking Oefententamen Logica en Verzamelingenleer voor BWI, , vrijdag 19 december 2008.

1. (a) Dit mag je zelf doen.

(b) [Een gedachtegang: Uit de Venn-diagrammen die je bij onderdeel (a) getekend hebt blijkt waarschijnlijk dat de twee verzamelingen verschillend zijn. De verzameling $(A \setminus C) \cup (B \setminus D)$ is net iets groter dan $(A \cup B) \setminus (C \cup D)$: het bevat de “stukjes” $(A \cap B \cap C) \setminus D$ en $(A \cap B \cap D) \setminus C$ extra. Maak dus verzamelingen A , B , C en D waarbij deze stukjes niet leeg zijn.]
Voor bijvoorbeeld

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{1, 2\}, \quad C = \{1\}, \quad \text{en} \quad D = \{2\}.$$

geldt

$$(A \cup B) \setminus (C \cup D) = \emptyset \quad \text{en} \quad (A \setminus C) \cup (B \setminus D) = \{1, 2\}.$$

Hieruit blijkt dat de twee verzamelingen in het algemeen verschillend zijn.

(c) $A \not\subset B$ betekent dat A tenminste één element bevat dat niet tot B behoort. Dus

$$\exists x \in V : x \in A \wedge \neg(x \in B).$$

(d) Let op: als je de eerste en tweede hebt, krijg je de derde en vierde via de wetten van de morgan vrijwel kado omdat

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right)^c \quad \text{en} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \right)^c.$$

Nu de antwoorden:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{1\}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = (0, 2], \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n^c = (-\infty, 0] \cup (2, \infty) \quad \text{en} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^c = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

(e) *Te bewijzen:* $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{1\}$.

Aldus: We laten eerst zien dat $\{1\} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, wat equivalent is met aantonen dat voor allen $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $1 \in I_n$. Maar dat is duidelijk (want $\frac{1}{n} \leq 1 \leq 1 + \frac{1}{n}$).

Nu laten we zien dat $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \subset \{1\}$. Neem daartoe $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ willekeurig. Dat betekent dat $x \in I_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. In het bijzonder geldt dat x in $I_1 = [1, 2]$ zit, dus $x \geq 1$.

We laten nu zien dat $x = 1$ door te veronderstellen dat $x > 1$ en vervolgens een tegenspraak af te leiden. Stel dus dat $x > 1$. Omdat $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$, is er een n zo dat $1 < 1 + \frac{1}{n} < x$. Blijkbaar behoort x niet tot I_n . Tegenspraak.

2. (a) We onderscheiden de volgende atomaire proposities:

sp := “de rockband kan spelen”

bl := “het bier wordt te laat geleverd”

f := “het feest gaat door”

ob := “de organisator is boos”

gt := “het geld wordt terugbetaald”

Het argument wordt dan:

$$(\neg sp \vee bl) \Rightarrow (\neg f \wedge ob), \quad \neg f \Rightarrow gt, \quad \neg gt \quad \therefore sp.$$

- (b) De volgende aaneenschakeling van argumenten laat zien dat uit de premissen sp geconcludeerd kan worden:

$\neg f \Rightarrow gt, \quad \neg gt \quad \therefore \neg \neg f$ (modus tollens)
 $\neg \neg f \quad \therefore f$ (involutie)
 $f \quad \therefore f \vee \neg ob$ (of introductie)
 $f \vee \neg ob \quad \therefore \neg(\neg f \wedge ob)$ (de morgan)
 $(\neg sp \vee bl) \Rightarrow (\neg f \wedge ob), \quad \neg(\neg f \wedge ob) \quad \therefore \neg(\neg sp \vee bl)$ (modus tollens)
 $\neg(\neg sp \vee bl) \quad \therefore sp \wedge \neg bl$ (de morgan)
 $sp \wedge \neg bl \quad \therefore sp$ (conjunctieve simplificatie).

3. (a) Hier staat dat bij elke x uit het interval $[-1, 1]$ minstens één y bestaat zo dat (x, y) op de kromme K ligt. De cirkel met middelpunt $(0, 0)$ en straal 1 voldoet hier aan. Deze cirkel is echter niet de grafiek van een functie. Voor een functie f geldt immers dat bij elke x *precies* één y hoort zo dat $y = f(x)$, wat wil zeggen dat bij elke x *precies* één y hoort zo dat (x, y) op de grafiek van f ligt.
- (b) Dat betekent dat de kromme volledig onder de horizontale lijn op hoogte z ligt.
4. (a) Neen, want niet elke $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ komt als beeld voor. Er is bijvoorbeeld geen $x \in \mathbb{R}$ waarvoor geldt dat $f(x) = (0, 5)$. Immers: stel zo'n x bestaat wel. Voor deze x geldt dan dat $2x - 4 = 0$ én $-x + 1 = 5$, dus $x = 2$ én $x = -4$. Tegenspraak. Blijkbaar bestaat zo'n x niet.
- (b) Waar. We laten zien dat voor alle x en y in $\mathbb{R}$ geldt: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. Neem daartoe x en y in $\mathbb{R}$ willekeurig en stel dat $f(x) = f(y)$. Dat betekent dat $(2x - 4, -x + 1) = (2y - 4, -y + 1)$. Dus $2x - 4 = 2y - 4$ én $-x + 1 = -y + 1$. Hieruit volgt eenvoudig dat $x = y$, waarmee het bewezen is.
- (c) De volgende redenering toont aan dat $f^{-1}[A] = \{1, 2\}$.

$$\begin{aligned}
 x \in f^{-1}[A] &\iff f(x) \in A \\
 &\iff (2x - 4, -x + 1) \in (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}) \\
 &\iff ((2x - 4, -x + 1) \in \mathbb{R} \times \{0\}) \vee ((2x - 4, -x + 1) \in \{0\} \times \mathbb{R}) \\
 &\iff -x + 1 = 0 \vee 2x - 4 = 0 \\
 &\iff x = 1 \vee x = 2 \\
 &\iff x \in \{1, 2\}
 \end{aligned}$$

5. (a) Je moet dus laten zien dat er een functie $f : V \rightarrow W$ en een deelverzameling A van V bestaan zo dat $f(x)$ in $f[A]$ niet betekent dat $x \in A$. Er zijn vele voorbeelden te bedenken, zoals $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met voorschrift $f(x) = x^2$, $A = [0, 1]$ en $x = -1$. Dan $f(x) = 1 \in [0, 1] = f[A]$, maar $x \notin A$.
- (b) Stel f is injectief. We laten zien dat dan voor alle $A \subset V$ geldt dat $f^{-1}[f[A]] \subset A$. Neem dus $A \subset V$ willekeurig en pak $x \in f^{-1}[f[A]]$. Dat betekent dat $f(x) \in f[A]$. Volgens onderdeel (a) mag je hieruit niet concluderen dat $x \in A$! Het betekent dat er een $a \in A$ is, zo dat $f(x) = f(a)$. Uit de injectiviteit van f volgt vervolgens dat x en a gelijk moeten zijn. Blijkbaar behoort x tot A . Einde bewijs.

6. We bewijzen dit met volledige inductie:

(Basis) Voor $n = 1$ geldt

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^1 a_k = a_1 = 1 \quad \text{en} \quad a_{n+2} - 1 = a_3 - 1 = 2 - 1 = 1,$$

want $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$. De uitspraak is dus geldig voor $n = 1$.

(Inductiestap) Neem $n \in \mathbb{N}$ willekeurig en veronderstel dat de uitspraak geldig is voor deze n , dus dat $\sum_{k=1}^n a_k = a_{n+2} - 1$. We tonen aan dat de uitspraak dan ook geldig is voor $n + 1$, dus te bewijzen

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = a_{(n+1)+2} - 1.$$

Welnu,

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1} \stackrel{!}{=} a_{n+2} - 1 + a_{n+1} = (a_{n+1} + a_{n+2}) - 1 = a_{n+3} - 1,$$

waarmee het bewezen is voor $n + 1$.

Het bewijspincipe van volledige inductie geeft nu dat de uitspraak geldig is voor alle n .

7. (a) Een getal van dit type maak je door voor het eerste cijfer een trekking te doen uit $V = \{3, 5, 8\}$, voor het tweede cijfer ook, enzovoorts. Het aantal is dus gelijk aan het aantal trekkingen uit V ter grootte 4, met volgorde, met teruglegging. Het aantal is dus $3^4 = 81$. Een andere manier van tellen: voor het eerste cijfer heb je drie keuzes. Bij elk van deze keuzes heb je voor het tweede cijfer ook weer drie keuzes, enzovoorts. In totaal heb je dus $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ keuzes.
- (b) Dit soort getallen kun je maken door een greep van vier te doen uit $V = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, dus een trekking zonder teruglegging, zonder volgorde. Dat kan op $\binom{10}{4}$ manieren. De vier getrokken getallen leg je vervolgens van klein naar groot neer. Dat kan op slechts één manier. Conclusie: Er zijn $\binom{10}{4}$ van dit soort getallen.
- (c) Nu moet je weer vier getallen trekken uit $V = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, zonder volgorde maar met teruglegging (want een cijfer mag meerdere keren voorkomen). Dit kan op $\binom{10+4-1}{9} = \binom{10+4-1}{3}$ manieren. Vervolgens moet je de gekozen cijfers van klein naar groot ordenen, wat maar op één manier kan!

Je kunt het ook als volgt aanpakken. Maak tien bakken genummerd van 0 tot en met 9 en neem vier identieke ballen. Verdeel die vier ballen over de tien bakken, waarbij een bak meerdere ballen mag bevatten. De cijfers van het getal zijn dan de nummers van de bakken die ballen gekregen hebben, waarbij een bak met n ballen een rijtje van n gelijke cijfers oplevert. Dit komt neer op het op een rij plaatsen van negen “schotjes” (de scheidingen tussen de bakken) en vier punten. In totaal heb je dus $9 + 4 = 13$ plaatsen waaruit je er 9 moet kiezen voor de schotjes (en de resterende vier voor de punten) of andersom. In totaal zijn er dus $\binom{13}{9} = \binom{13}{4}$ mogelijkheden.