

Tentamen Lineaire Optimalisering, 18-12-2013

REKENMACHINE IS NIET TOEGESTAAN

Puntentoekenning:

opgave 1(a) 10, (b) 5, (c) 5, (d) 5

opgave 2(a) 10, (b) 10

opgave 3(a) 5, (b) 10, (c) 10

Maximaal totaal 70 punten.

Tentamencijfer

$$\frac{\text{totale aantal punten}}{7}$$

Eindcijfer

$$\frac{1}{4}\text{Eindcijfer toetsen} + \frac{3}{4}\text{Tentamencijfer}$$

Opgave 1

Beschouw het LP-probleem

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 \\ \text{onder} \quad & 9x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & x_1 + 15x_2 + 6x_3 \leq 25 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

- (a) Breng dit LP-probleem in de standaard basisvorm. Geef de startoplossing voor de simplex-algoritme en pas **één** iteratie toe om vanuit deze startoplossing een verbeterde basisoplossing te vinden. Geef op overzichtelijke en beargumenteerde wijze aan hoe u deze verbeterde basisoplossing construeert en wat de bijbehorende basisvorm van het LP-probleem is.
- (b) Wat zijn de nieuwe basisvariabelen? Wat zijn hun waarden en wat is de nieuwe criteriumwaarde? Hoe kun je van de nieuwe basisvorm aflezen of de gevonden oplossing optimaal is? Is dit hier het geval?
- (c) Formuleer van het oorspronkelijke LP-probleem in ongelijkheidsvorm het duale LP-probleem. Wat kun je zeggen over de minimale criteriumwaarde van het duale probleem?
- (d) Zonder het primale helemaal op te lossen, laat zien, door inspectie van het duale probleem, of het primale probleem onbegrensd is.

Opgave 2. *Bedenk je goed dat je voor goede onderdelen van de modellen in deze opgave al punten kunt verdienen*

- (a) Holland Seinen heeft een contract getekend om 1000 nachtkijkers te leveren voor een vredesmissie. Voor de productie van de nachtkijkers heeft het bedrijf vier locaties ter beschikking. Vanwege locale omstandigheden zijn de kosten voor het produceren van een nachtkijker verschillend per locatie. De benodigde arbeidskracht en het benodigde materiaal voor het maken van een nachtkijker is ook verschillend per locatie. Deze gegevens betreffende de productie per nachtkijker staan in de volgende tabel:

locatie	kosten	arbeidsuren	eenheden materiaal
1	15	2	3
2	10	3	4
3	9	4	5
4	7	5	6

Om de locaties gereed te maken voor het produceren van verrekijkers moeten bepaalde ruimtes stofvrij gemaakt worden. Dit vraagt, voor ieder van de locaties, eenmalig een aantal uren arbeid, indien besloten wordt in de locatie te produceren, onafhankelijk van het aantal verrekijkers dat dan op de locatie gemaakt zal worden. Dit zijn 10 uren voor Locatie 1, 15 voor Locatie 2, 8 voor Locatie 3, en 12 voor Locatie 4.

Voor de vier productielocaties tezamen zijn in totaal 3300 arbeidsuren ter beschikking en 4000 eenheden materiaal. De opdrachtgever heeft in het contract geëist dat tenminste 400 nachtkijkers worden geproduceerd op locatie drie.

Formuleer het probleem van het vinden van de oplossing die de totale winst maximaliseert als een Geheeltallig Lineair Programmerings probleem.

- (b) Manon R. maakt voor het bedrijf Burger Meister elke week N soorten hamburger sauzen, genummerd $j = 1, 2, \dots, N$. Elke saus wordt gemaakt door het mengen van M ingrediënten, genummerd $i = 1, 2, \dots, M$. Er geldt dat $N > M$. Hoewel een zekere mate van vrijheid is toegestaan bij het maken van de sauzen, moet er voldaan worden aan de volgende eisen: elke saus moet voor tenminste 10% bestaan uit ingrediënt 1. Saus 2 moet voor tenminste 25% uit ingrediënt 3 bestaan. Verder eist Burger Meister dat er 4 maal zoveel van saus 1 geleverd moet worden als van saus 2. Per week kan ten hoogste b_i liter van ingrediënt i besteld worden, $i = 1, 2, \dots, M$. Manon kan tegen een prijs van w_j euro per liter van saus j net zoveel afzetten van de sauzen als dat zij produceert, $j = 1, 2, \dots, N$. Ingrediënt i kost een bedrag c_i euro per liter om in te kopen, $i = 1, 2, \dots, M$.

Formuleer dit probleem als een lineair programmeringsprobleem zodat Manon haar netto winst op de sauzen kan maximaliseren.

Hint: introduceer voor $i = 1, 2, \dots, M, j = 1, 2, \dots, N$ de beslissingsvariabelen: x_{ij} = aantal liters van ingrediënt i dat Manon per week inkoopt voor saus j .

Opgave 3.

Beschouw het volgende knapzak probleem.

$$\begin{array}{ll}\max & 3x_1 + 10x_2 + 9x_3 + x_4 \\ \text{onder :} & 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}\end{array}$$

- (a) Geef de unieke oplossing van de LP-Relaxatie van dit probleem. Geef ook de bijbehorende optimale criteriumwaarde van de LP-Relaxatie.
- (b) Los het bovenstaande 0-1 knapzak probleem op met behulp van Branch en Bound en vind op deze manier de optimale oplossing met de bijbehorende optimale criteriumwaarde.
- (c) Neem hetzelfde probleem, maar nu zonder de restrictie $x_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, 3, 4$, maar wel met de restrictie dat x_i geheeltallig moet zijn, $i = 1, 2, 3, 4$. Los ook dit knapzak probleem op.