

Gebruik van rekenmachine, dictaat of aantekeningen is niet toegestaan

1. **[Aanwijzing vooraf:** maak evt. gebruik van $\int_0^\infty e^{-t} t^k dt = k!$ voor $k = 0, 1, 2, \dots]$
 We beschouwen $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, de vectorruimte van polynomen van graad ten hoogste 1 in de (reële) variabele t en met complexe coëfficiënten. Voor twee polynomen $p, q \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ definiëren we

$$\langle p, q \rangle = \int_0^\infty e^{-t} p(t) \overline{q(t)} dt.$$

- a) Toon aan dat $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een inproduct op $\mathbb{P}_1$ definieert.

We bekijken de verzameling polynomen

$$\mathcal{C} = \{1, 1 - t\}.$$

- b) Toon aan dat $\mathcal{C}$ een orthonormale basis is voor $\mathbb{P}_1$ t.o.v. het gegeven inproduct.

We definiëren vervolgens de lineaire afbeelding $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_1$ door $T(p) = p'(t)$ (dus de afgeleide). Verder definiëren we $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$, de standaardbasis voor $\mathbb{P}_2$.

- c) Bepaal $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$, de matrix van T t.o.v. de bases $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$.
2. Laat $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ een vector zijn met lengte 1 ($\|\mathbf{u}\| = 1$) en laat $\langle \cdot, \cdot \rangle$ het standaard inproduct zijn op $\mathbb{C}^n$. De operator $P : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ wordt gedefinieerd door

$$P(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u}.$$

- a) Toon aan dat P lineair is.
 b) Toon aan dat P Hermitisch (zelfgeadjungeerd) is.
 c) Toon aan dat P idempotent is (d.w.z. $P^2 = P$).
 d) **Bonusopgave:**

Bepaal de eigenwaarden van P en de bijbehorende eigenruimten.

3. Laat U een unitaire operator zijn op de unitaire ruimte $V = \mathbb{C}^n$. Laat $U\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ met $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \in V$ en $\lambda \in \mathbb{C}$.

- a) Toon aan dat $|\lambda| = 1$.
 b) Toon aan dat λ^{-1} een eigenwaarde is van U^* .
 c) Laat $U\mathbf{w} = \mu\mathbf{w}$ met $\mu \in \mathbb{C}$. Toon aan: als $\lambda \neq \mu$ dan geldt $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$.
 d) Laat $\langle \mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Toon aan: $\langle U\mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle = 0$ en $\langle U^*\mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

Z.O.Z.

4. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

De eigenwaarden van A zijn 0 (multipliciteit 1) en 2 (multipliciteit 2).

Bepaal een basis voor de eigenruimte van de enkele eigenwaarde en een basis voor de gegeneraliseerde eigenruimte van de dubbele eigenwaarde.

5. Gegeven is de matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bepaal een diagonaliseerbare matrix S en een nilpotente matrix N zó dat $B = S + N$ en $NS = SN$.

b) Bereken e^{tB} .

Normering:

1 : a) 2	2 : a) 2	3 : a) 3	4 : 4	5 : a) 3
b) 3	b) 3	b) 2		b) 3
c) 3	c) 3	c) 3		
	d) 3	d) 2		
8	11	10	4	6

$$\text{Eindcijfer} = \min \left\{ 10, \frac{\# \text{ punten}}{4} + 1 \right\}$$