

Faculteit der Exacte Wetenschappen	Tentamen Lineaire Algebra 2
Vrije Universiteit	Duur: 2 uur 27-03-2009

Alle vectorruimten worden eindig dimensionaal verondersteld.

1. a) Geef een voorbeeld van een vectorruimte V en een lineaire afbeelding $A : V \rightarrow V$ zo dat $\text{im } A = \ker A$.
b) Bestaat er zo'n voorbeeld onder de restrictie dat $\dim V = 5$?
c) Zij V een vectorruimte en $p : V \rightarrow V$ een projectie met rang n . Wat is het spoor (trace) van de matrix van P t.o.v. een gegeven basis van V ?
2. Zij $\mathbb{P}_n$ de vectorruimte van polynomen met graad ten hoogste n met inwendig product

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t) \overline{q(t)} dt.$$

- a) Laat zien dat de functionaal δ' , gegeven door
$$\delta'(p) = p'(0)$$
gerepresenteerd kan worden door een $q \in \mathbb{P}_n$ zo dat
$$\delta'(p) = \langle p, q \rangle.$$
- b) Bereken q expliciet voor $\mathbb{P}_1$.
3. Zij

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Bepaal de decompositie $A = S + N$ in een commuterend semisimple gedeelte S en een nilpotent gedeelte N .
- b) Beschrijf hoe in het algemeen e^{tA} kan worden berekend als de $S + N$ decompositie bekend is en men de eigenwaarden van S kent.
- c) Los de differentiaalvergelijking

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

op door e^{tA} uit te rekenen voor de gegeven A .

Normering:

1:	a)	1	2:	a)	1	3:	a)	1
	b)	1		b)	1		b)	1
	c)	1		c)	1		c)	1
	+	—		+	—		+	—
		3			3			3

Eindcijfer = Totaal + 1.