

Gebruik van rekenmachine, boek of aantekeningen is niet toegestaan

1. Gegeven zijn de vectoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Ga na of de volgende beweringen waar zijn. Motiveer je antwoorden!

- a) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ is een lineair onafhankelijke verzameling;
- b) De vectorvergelijking $x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1$ heeft een unieke oplossing;
- c) De vectorvergelijking $x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3 = \mathbf{b}$ heeft een oplossing voor iedere $\mathbf{b} \in \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

2. De matrix A is gegeven door

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

- a) Bepaal de LU-factorisatie van A .
- b) Geef een basis voor de nulruimte van A .
- c) Laat T de lineaire afbeelding zijn gedefinieerd door $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.
Is T een surjectieve afbeelding? [Motiveer je antwoord.]

3. De matrix B en de vector $\mathbf{w}$ zijn gegeven door

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Bepaal, m.b.v. het Gram-Schmidt proces, een orthogonale basis voor $\text{Col}(B)$ (de kolomruimte van B).
- b) Geef een QR factorisatie van B .
- c) Volgens de orthogonale decompositiestelling is de vector $\mathbf{w}$ te schrijven als $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, waarin $\mathbf{w}_1 \in \text{Col}(B)$ en $\mathbf{w}_2 \in (\text{Col}(B))^\perp$. Bepaal $\mathbf{w}_1$ en $\mathbf{w}_2$.

Z.O.Z.

4. De matrix C en de vector $\mathbf{v}$ zijn gegeven door:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Toon aan dat $\mathbf{v}$ een eigenvector is van C en bepaal de bijbehorende eigenwaarde.
- b) Laat zien dat C diagonaliseerbaar is.

5. Bepaal of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.

- a) Laat A en B symmetrische $n \times n$ matrices zijn. Dan is AB ook symmetrisch.
- b) Laat A en B $n \times n$ matrices zijn. Als $A^3 = I_n$ (de identiteitsmatrix) en A is gelijkvormig (similar) met B , dan is ook $B^3 = I_n$.
- c) Laat U een orthogonale $n \times n$ matrix zijn en $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Dan geldt dat $\|U\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$.

6. We beschouwen de vectorruimte $\mathbb{P}_2$ van polynomen met graad ten hoogste 2, inclusief het nulpolynoom. Gegeven zijn de standaardbasis $\mathcal{E}$ en de verzameling $\mathcal{C}$ door

$$\mathcal{E} = \{1, t, t^2\} \quad \text{en} \quad \mathcal{C} = \{1 + t + t^2, t + t^2, t^2\}.$$

- a) Toon aan dat ook $\mathcal{C}$ een basis is voor $\mathbb{P}_2$.
- b) Bepaal de overgangsmatrix $\begin{matrix} \text{P} \\ \mathcal{C} \leftarrow \mathcal{E} \end{matrix}$.

De lineaire afbeelding $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ wordt gedefinieerd door

$$T(p(t)) = \begin{pmatrix} p(1) \\ p(0) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- c) Geef een basis voor de kern van T .

7. Laat H en K deelruimtes zijn van een vectorruimte V . Laat $H \cap K$ de doorsnede zijn van H en K , d.w.z. $H \cap K$ is de verzameling van alle vectoren $\mathbf{v}$ die zowel in H als in K zitten. Toon aan dat $H \cap K$ ook een deelruimte is van V .

Normering:

1 : 5	2 : a) 3	3 : a) 3	4 : a) 1	5 : 8	6 : a) 2	7 : 5
	b) 2	b) 2	b) 3		b) 3	
	c) 2	c) 3			c) 3	
_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____
5	7	8	4	8	8	5

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{5} + 1$$