

1. a) Zet het stelsel in aangevulde-matrix vorm $[A | \mathbf{b}]$ en pas elementaire rij-operaties toe:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & | & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & | & 6 \\ -1 & 2 & 2 & -3 & | & h \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & | & h+2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & h+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & h+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Dus het stelsel is consistent als en slechts als $h = -1$.

- b) Zie onderdeel 1a), met nu de nulvector als rechterlid. Kies x_3 en x_4 vrij. Dan volgt dat $x_2 = -2x_3 + x_4$ en $x_1 = -2x_3 - x_4$. Oftewel:

$$\mathbf{x} = x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ met } x_3, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Dus een basis voor $\text{Nul}(A)$ is $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

- c) Zie onderdeel 1a): de eerste twee kolommen van A zijn de pivotkolommen. Dus

een basis voor $\text{Col}(A)$ is $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

2. a) De j -de kolom van de standaardmatrix is gelijk aan $T(\mathbf{e}_j)$, waarbij $\mathbf{e}_j$ de j -de kolom van de identiteitsmatrix I_3 is. Dus de standaardmatrix is

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- b) Bekijk $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & | & 0 \\ 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 3 & -1 & | & 0 \\ 0 & 3 & -4 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -7 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Dus $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ heeft slechts $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ als oplossing. $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ heeft dus voor iedere $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ maximaal één oplossing en dus is T een injectieve afbeelding.

- c) Zie ook onderdeel 2b): met drie vectoren kun je niet heel $\mathbb{R}^4$ opspannen, dus er zijn $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ waarvoor $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ geen oplossingen heeft. Kortom T is geen surjectieve afbeelding.

3. Ontwikkelen naar (bijvoorbeeld) de vierde rij geeft:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 9 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= 8 + 36 - 12 + 18 = 50. \end{aligned}$$

4. Stel de inverse van A is

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

waarbij B_{11}, B_{21} en B_{22} dezelfde afmetingen hebben als A_{11}, A_{21} resp. A_{22} en B_{12} dezelfde afmeting heeft als O . Omdat moet gelden dat $AB = I$, volgt dat

- (i) $A_{11}B_{11} + OB_{21} = A_{11}B_{11} = I$, dus $B_{11} = A_{11}^{-1}$,
- (ii) $A_{11}B_{12} + OB_{22} = A_{11}B_{12} = O$, dus $B_{12} = O$, want A_{11} is inverteerbaar,
- (iii) $A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} = A_{22}B_{22} = I$, dus $B_{22} = A_{22}^{-1}$,
- (iv) $A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = A_{21}A_{11}^{-1} + A_{22}B_{21} = O$, dus $B_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}$.

Dus

$$B = A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & O \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

5. a) WAAR [3 punten]. Bekijk de lineaire combinatie

$$c_1\mathbf{u} + c_2(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + c_3(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}) = (c_1 + c_2 + c_3)\mathbf{u} + (c_2 + c_3)\mathbf{v} + c_3\mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

Omdat $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ een lineair onafhankelijke verzameling is, is de enige oplossing van bovenstaande vergelijking: $c_1 + c_2 + c_3 = 0$, $c_2 + c_3 = 0$ en $c_3 = 0$, waaruit volgt dat $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Dus ook $\{\mathbf{u}, \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\}$ is een lineair onafhankelijke verzameling.

- b) WAAR [2 punten]. Als AB bestaat, dan moet gelden $n = p$, en AB is dan een $m \times q$ matrix. Als BA bestaat, dan moet gelden $m = q$, en BA is dan een $p \times n$ matrix. Als ook $AB + BA$ moet bestaan, dan moet ook nog gelden $m = p$ en $q = n$. Kortom: $m = n = p = q$.
- c) WAAR [2 punten]. Bekend is dat $\det A^T = \det A$ en dat $\det I_n = 1$. Met de rekenregels voor de determinant volgt dan verder:

$$\begin{aligned} \det(BA^TB^{-1}) &= \det(B)\det(A^T)\det(B^{-1}) = \det(B)\det(B^{-1})\det(A^T) = \\ &= \det(BB^{-1})\det(A^T) = \det(I_n)\det(A) = \det(A). \end{aligned}$$

- d) WAAR [2 punten]. Als $\dim \text{Col}(B) < n$, dan zijn de kolommen van B lineair afhankelijk, dus is B niet inverteerbaar. Maar dan is AB ook niet inverteerbaar, omdat $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(A) \cdot 0 = 0$. Dus is ook $\dim \text{Col}(AB) < n$.

6. a) Kies twee willekeurige polynomen $\mathbf{p}(t)$ en $\mathbf{q}(t)$ uit $\mathbb{P}_3$ en een willekeurige scalar $c \in \mathbb{R}$. Dan geldt:
- (i)

$$\begin{aligned} T((\mathbf{p} + \mathbf{q})(t)) &= \begin{pmatrix} (\mathbf{p} + \mathbf{q})(0) \\ (\mathbf{p} + \mathbf{q})(1) \\ (\mathbf{p} + \mathbf{q})(0) + (\mathbf{p} + \mathbf{q})(1) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{p}(0) \\ \mathbf{p}(1) \\ \mathbf{p}(0) + \mathbf{p}(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{q}(0) \\ \mathbf{q}(1) \\ \mathbf{q}(0) + \mathbf{q}(1) \end{pmatrix} = T(\mathbf{p}(t)) + T(\mathbf{q}(t)). \end{aligned}$$

$$(ii) \quad T((c\mathbf{p})(t)) = \begin{pmatrix} (c\mathbf{p})(0) \\ (c\mathbf{p})(1) \\ (c\mathbf{p})(0) + (c\mathbf{p})(1) \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \mathbf{p}(0) \\ \mathbf{p}(1) \\ \mathbf{p}(0) + \mathbf{p}(1) \end{pmatrix} = cT(\mathbf{p}(t)).$$

Dus T is een lineaire afbeelding.

- b) Kies $\mathbf{p}(t)$ uit $\mathbb{P}_3$ willekeurig, dus kies $\mathbf{p}(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$ voor willekeurige $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Voor de kern van T berekenen we

$$T(\mathbf{p}(t)) = \begin{pmatrix} a \\ a + b + c + d \\ 2a + b + c + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt dat $a = 0$ en $b + c + d = 0$. De kern van T bestaat dus uit alle polynomen uit $\mathbb{P}_3$ met $a = 0$ en $b = -c - d$, met $c, d \in \mathbb{R}$. Dus uit alle polynomen van de vorm $\mathbf{p}(t) = -(c + d)t + ct^2 + dt^3 = c(t^2 - t) + d(t^3 - t)$ met $c, d \in \mathbb{R}$. De verzameling $\{t^2 - t, t^3 - t\}$ spant dus de kern van T op en is bovendien lineair onafhankelijk. Een basis voor de kern van T is dus $\{t^2 - t, t^3 - t\}$.

- c) Zie ook onderdeel 6b): Het bereik van T bestaat uit alle vectoren van de vorm

$$\begin{pmatrix} a \\ a + b + c + d \\ 2a + b + c + d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (b + c + d) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{met } a \text{ en } K = b + c + d \in \mathbb{R}.$$

Het bereik van T wordt dus opgespannen door $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Deze verzameling vectoren is bovendien lineair onafhankelijk, dus vormt een basis voor het bereik van T . [N.B. Je kunt ook direct conclusies trekken uit

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}(0) \\ \mathbf{p}(1) \\ \mathbf{p}(0) + \mathbf{p}(1) \end{pmatrix} = \mathbf{p}(0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{p}(1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.]$$