

Gebruik van rekenmachine, boek of aantekeningen is niet toegestaan

1. De matrix A en de vector $\mathbf{b}$ zijn gegeven door:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ h \end{pmatrix}.$$

- a) Voor welke $h \in \mathbb{R}$ is het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ consistent?
- b) Bepaal een basis voor $\text{Nul}(A)$, de nulruimte van A .
- c) Bepaal een basis voor $\text{Col}(A)$, de kolomruimte van A .

2. De lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ wordt gegeven door

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x - z \\ x + 2y \\ x - y + z \\ y + 2z \end{pmatrix}.$$

- a) Bepaal de standaardmatrix behorende bij de afbeelding T .
- b) Is T een injectieve (one-to-one) afbeelding? Verklaar je antwoord.
- c) Is T een surjectieve (onto) afbeelding? Verklaar je antwoord.

3. Bereken de determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

4. De blokmatrix A wordt gegeven door

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Hierbij zijn A_{11} en A_{22} inverteerbare matrices en stelt O de nulmatrix voor.
Toon aan dat A inverteerbaar is en bepaal de inverse van A , uitgedrukt in A_{11} , A_{21} , A_{22} en eventuele inversen van die matrices.

Z.O.Z.

5. Bepaal of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.
- Laat V een vectorruimte zijn en $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$. Als de verzameling $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ lineair onafhankelijk is, dan is de verzameling $\{\mathbf{u}, \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\}$ ook lineair onafhankelijk.
 - Laat A een $m \times n$ matrix zijn en B een $p \times q$ matrix. Als de matrix-operatie $AB + BA$ goed gedefinieerd is, dan moet gelden dat $m = n = p = q$.
 - Laat A een $n \times n$ matrix zijn en B een inverteerbare $n \times n$ matrix. Dan geldt $\det(BA^T B^{-1}) = \det(A)$.
 - Laat A en B beide $n \times n$ matrices zijn. Als $\dim \text{Col}(B) < n$, dan is ook $\dim \text{Col}(AB) < n$.
6. $\mathbb{P}_3$ is de vectorruimte van alle polynomen van graad maximaal 3, inclusief het nulpolynoom. De afbeelding $T : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ wordt gedefinieerd door

$$T(\mathbf{p}(t)) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(0) + p(1) \end{pmatrix}.$$

- Toon aan dat T een lineaire afbeelding is.
- Bepaal een basis voor de kern (kernel) van T .
- Bepaal een basis voor het bereik (range) van T .

Normering:

1 : a) 2	2 : a) 2	3 : 3	4 : 4	5 : 9	6 : a) 2
b) 3	b) 2				b) 3
c) 2	c) 2				c) 2
7	6	3	4	9	7

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{4} + 1$$