

Normering:

$1a : 2;$ $2a : 1;$ $3 : 5;$ $4a : 3;$ $5 : 3;$ $6 : 6;$
 $b : 2;$ $b : 2;$ $b : 2;$
 $c : 3;$ $c : 1;$
 $d : 2;$ $d : 1;$
 $e : 1;$ $e : 2.$

Eindcijfer = $1 + \frac{\text{totaal}}{4}$.

Een uitwerking van het tentamen staat uiterlijk 27 mei op www.math.vu.nl/~freek

1. Gegeven zijn de matrix A en de vector $\mathbf{v}$ door

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- Laat zien dat $\mathbf{v}$ een eigenvector is van A en bepaal de bijbehorende eigenwaarde.
- Bepaal een basis voor de eigenruimte van A bij de eigenwaarde -2 .
(Hint: de eigenruimte heeft dimensie 3.)
- Bepaal een orthogonale basis van $\mathbb{R}^4$ die bestaat uit eigenvectoren van A .
- Bepaal een diagonaalmatrix D zo dat $A = QDQ^T$ waarbij Q een orthogonale matrix is. De matrix Q hoeft niet te worden berekend.
- Bereken het karakteristieke polynoom $\det(A - \lambda I)$ van A .
(Een product van factoren van de graad 1 is goed genoeg.)

2. Zij $A = BC$ waarbij

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Toon aan dat $B\mathbf{y} = \mathbf{0}$ als en alleen als $\mathbf{y} = \mathbf{0}$.
- Toon aan dat de rang van de matrix C gelijk is aan 3.
- Toon aan dat $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ als en alleen als $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- Toon aan dat $\dim \text{Nul } A = 2$. (In woorden: de dimensie van de nulruimte van de matrix A is gelijk aan 2.)
- Toon aan dat de kolommen van de matrix B een basis vormen voor de kolomruimte van A .

Z.O.Z.

3. Los op:

$$\begin{cases} x_1'(t) &= -x_1(t) + x_2(t), \\ x_2'(t) &= 2x_1(t), \\ x_1(0) &= 3, \\ x_2(0) &= 0. \end{cases}$$

4. Zij $V = \mathbf{P}_3$ de vectorruimte bestaande uit de polynomen van de graad ten hoogste 3 én het nulpolynoom. Zij $W = \{p(t) \in V \mid p(1) + p(0) = 0\}$.

(a) Toon aan dat W een deelruimte is van V .

(b) Gegeven is $\mathcal{B} = \{q_1(t), q_2(t), q_3(t)\}$ met $q_1(t) = t - \frac{1}{2}$, $q_2(t) = t^2 - \frac{1}{2}$, $q_3(t) = t^3 - \frac{1}{2}$, een basis is van W . Toon aan dat $p(t) = t^3 + 2t^2 + 3t - 3$ een vector is uit W en bepaal de coördinaatvector $[p(t)]_{\mathcal{B}}$ van $p(t)$ ten opzichte van $\mathcal{B}$.

5. Bepaal de kleinste-kwadraten-oplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ voor

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

6. Bepaal of de onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld. Met A wordt steeds een matrix met reële elementen aangeduid.

(a) Zij A een $m \times n$ matrix die rijequivalent is met een echelonmatrix U . Van U is gegeven dat U precies k rijen heeft die ongelijk aan de nulrij zijn. Dan is de dimensie van de nulruimte van A gelijk aan $m - k$.

(b) Als de matrix A diagonaliseerbaar is, dan zijn de kolommen van A lineair onafhankelijk.

(c) Zij $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ een orthonormale basis van $\mathbb{R}^3$. Van de vector $\mathbf{x}$ is gegeven dat de coördinaatvector ten opzichte van $\mathcal{U}$ gegeven wordt door $[\mathbf{x}]_{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$.

Dan is $\|\mathbf{x}\|^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$.

(d) Zij A een $m \times n$ matrix en $B = A^T A$. Dan zijn er een diagonaalmatrix D en een orthogonale matrix Q zo dat $B = QDQ^T$.