

Rekenmachine toegestaan, tentamen is inclusief formuleblad. Antwoorden zonder toelichting worden niet goedgekeurd.

1. In $\mathbb{R}^3$ worden twee lijnen gedefinieerd door de relaties

$$l_1: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{2}$$

en

$$l_2: x-2 = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3}.$$

- Geef de vektorvergelijking voor de lijn l_1 .
 - Staan de lijnen loodrecht op elkaar? (Hiervoor is het niet nodig dat ze elkaar ook snijden)
 - Bepaal de afstand van l_2 tot de oorsprong.
2. a) Geef de formule voor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, met

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3.$$

- Laat zien dat $\mathbf{a}$ loodrecht staat op $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
 - Een vlak in $\mathbb{R}^3$ wordt bepaald door drie punten: $(1, 2, 3)$, $(0, 1, 1)$ en $(1, 0, 0)$. Bepaal de impliciete vergelijking voor de normaal op dit vlak door het punt $(1, 0, 0)$.
3. a) Zij A een $n \times m$ -matrix. Laat zien dat AA^T symmetrisch is.
- b) Bereken de determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

- c) Zij

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Wat is de formule voor A^{-1} ?

4. Gegeven zijn de vergelijkingen

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 7 \\ 9x_1 + 11x_2 + 4x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Los dit stelsel op met behulp van Gauss eliminatie.

Z.O.Z.

Formuleblad Calculus voor Informatica

• Exponenten:

$$(ab)^r = a^r b^r$$

$$a^r a^s = a^{r+s}$$

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty, \text{ voor vaste } k \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^k \ln x = 0, \text{ voor vaste } k > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^k} = 0, \text{ voor vaste } k > 0$$

• Trigonometrie:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 1 - 2\sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \end{aligned}$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

• Limieten:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

• Rekenregels differentiëren:

$$\frac{d}{dx} (f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

$$\frac{d}{dx} (cf(x)) = cf'(x)$$

$$\frac{d}{dx} (f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

• Afgeleiden:

$$\frac{d}{dx} x^k = kx^{k-1}$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

• **Rekenregels integreren:**

$$\begin{aligned}\int af(x) + bg(x) dx \\ = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx\end{aligned}$$

$$\int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) + C$$

$$\begin{aligned}\int f'(x)g(x) dx \\ = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx\end{aligned}$$

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

• **Primitieven:**

$$\begin{aligned}\int x^k dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} + C, \\ (k \neq -1)\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

• **Reeksen:**

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, |x| < 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\begin{aligned}\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \\ |x| < 1\end{aligned}$$

- **Complexe getallen:** In het vervolg is $z = x + iy$, $z \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$.
Zij $a \in \mathbb{C}$. Dan is $|z - a|$ de afstand van a tot z in het complexe vlak (Gaussvlak).

$$i^2 = -1$$

$$\bar{z} = x - iy, \text{ de geconjugeerde van } z$$

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|z^n| = |z|^n$$

$$\arg(z^n) = n \arg(z) \pmod{2\pi}$$

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$$

$$e^{\pi i} = -1$$