

Normering:

$$\begin{array}{lllllll} 1a : 1; & 2a : 2; & 3a : 2; & 4a : 1; & 5 : 6; & 6 : 9; & 7a : 2; \\ b : 2; & b : 3; & b : 2; & b : 3; & & & b : 2; \\ & & c : 3; & c : 1; & & & c : 2; \\ & & d : 1; & d : 2; & & & \\ & & & e : 1. & & & \end{array}$$

Eindcijfer = $1 + \frac{\text{totaal}}{5}$.

Een uitwerking van het tentamen staat uiterlijk 30 augustus op www.math.vu.nl/~freek

1. Zij $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ en $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}$.

- (a) Onder welke voorwaarde voor de getallen a , b en c is de matrix A inverteerbaar?
- (b) Los met de regel van Cramer de vergelijking $A\mathbf{x} = \mathbf{w}$ op voor het geval dat A inverteerbaar is.

2. Gegeven is het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} 8x_1 + kx_2 = 7 \\ 2x_1 + 2x_2 = -2 \\ -2x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$$

voor iedere waarde van $k \in \mathbb{R}$.

- (a) Voor welke waarde(n) van k heeft het stelsel ten minste één oplossing? Los voor die waarde(n) van k het stelsel op.
- (b) Zij nu $k = 2$. Bepaal de kleinste-kwadraten oplossing van het stelsel.

3. Gegeven zijn de vectoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ en $\mathbf{b}$, door

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -9 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

De deelruimte $V \subset \mathbb{R}^4$ wordt opgespannen door het drietal vectoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$.

- (a) Bepaal de dimensie van V .
- (b) Bepaal een orthogonale basis van V .
- (c) Bepaal de orthogonale (=loodrechte) projectie $\hat{\mathbf{b}}$ van $\mathbf{b}$ op V .
- (d) Bepaal een vector die orthogonaal is op V . (*Hint: gebruik onderdeel (c).*)

Z.O.Z.

4. Gegeven zijn de matrix A en de vector w door

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 3 \\ -12 & 5 & -6 \\ -18 & 9 & -10 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Toon aan dat w een eigenvector is van A en bepaal de bijbehorende eigenwaarde.
- (b) Bepaal de eigenruimte bij de eigenwaarde -1 .
- (c) Bepaal $\det A$.
- (d) Bepaal een diagonaalmatrix D en een inverteerbare matrix P zó dat $A = PDP^{-1}$.
- (e) Bepaal de eigenwaarden van A^2 . (*Hint: gebruik onderdeel (d).*)

-
5. Los op:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) - 2x_2(t), \\ x_2'(t) = -3x_1(t) + x_2(t), \\ x_1(0) = 4, \\ x_2(0) = 1. \end{cases}$$

6. Bepaal of de onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld. Met A en B worden steeds matrices met reële elementen aangeduid.

- (a) Als de matrix A inverteerbaar is, dan is A diagonaliseerbaar.
- (b) Gegeven zijn de 2×2 matrices A en B . Als A en B inverteerbaar zijn, dan is ook de 4×4 matrix $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ inverteerbaar.
- (c) Als de 3×3 matrix A zo is dat $A^2 = I$, dan is $A = I$ of $A = -I$. (Hierbij is I de 3×3 eenheidsmatrix.)
- (d) Als A een 4×4 matrix is, dan is $\det AA^T \geq 0$.
- (e) Een oplossing voor een lineair stelsel van 2 vergelijkingen met 2 onbekenden is altijd te vinden met de regel van Cramer.
- (f) De afbeelding $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, gegeven door voor iedere $x = (x_1, x_2, x_3)$ te definiëren $T(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$, is lineair.
- (g) Als de $n \times n$ matrix A zo is dat $A^2 = A$ en λ een eigenwaarde is van A , dan is $\lambda = 1$ of $\lambda = 0$.

7. In de vectorruimte $\mathbb{P}_2$ van de polynomen van de graad ten hoogste 2 inclusief het nulpolynoom is de standaardbasis $\mathcal{E} = \{1, t, t^2\}$ en wordt het stelsel $\mathcal{C}$ van drie vectoren gegeven door $\mathcal{C} = \{1 + t + t^2, 1 - t + t^2, 1 - t^2\}$.

- (a) Toon aan dat $\mathcal{C}$ een basis is.
- (b) Zij $q(t) = 2 - t + 4t^2$. Bepaal de coördinaatvector $[q(t)]_{\mathcal{C}}$ van $q(t)$ ten opzichte van $\mathcal{C}$.
- (c) Bepaal de overgangsmatrix $A = {}^P_C \leftarrow \mathcal{E}$ die zo is dat voor iedere $p(t) \in \mathbb{P}_2$ geldt $[p(t)]_{\mathcal{C}} = A[p(t)]_{\mathcal{E}}$.