

Normering:

1a : 3;	2a : 2;	3a : 2;	4a : 1;	5 : 9;	6a : 1;
b : 2;	b : 2;	b : 2;	b : 6;		b : 1;
c : 3;	c : 3;	c : 3;			c : 2;
	d : 2;	d : 1.			

Eindcijfer = $1 + \frac{\text{totaal}}{5}$.

Een uitwerking van het tentamen staat uiterlijk 4 juni op www.math.vu.nl/~freek

1. Voor alle reële getallen α en β worden de matrix A_α en de vector $\mathbf{b}_\beta$ gegeven door

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & \alpha - 2 & 0 \\ 1 & 2\alpha - 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ \beta + 4 \end{bmatrix}.$$

- (a) Bepaal voor welke waarde(n) van α en β de vergelijking $A_\alpha \mathbf{x} = \mathbf{b}_\beta$ *uniek* oplosbaar is en bepaal de (van α en β afhankelijke) oplossing.
- (b) Bepaal voor welke waarde(n) van α en β de vergelijking $A_\alpha \mathbf{x} = \mathbf{b}_\beta$ geen oplossing heeft.
- (c) Voor welke waarde(n) van α en β heeft de vergelijking $A_\alpha \mathbf{x} = \mathbf{b}_\beta$ meer dan één oplossing? Bepaal in dit geval de oplossingsverzameling(en).

2. Gegeven zijn de matrix A en de vector $\mathbf{b}$ door

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix},$$

De kolommen van A noteren we (in volgorde) als $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ en $\mathbf{a}_3$. De ruimte $V = \text{Col } A$ is de kolomruimte van A .

- (a) Bepaal een basis van V .
- (b) Bepaal een orthonormale basis van V met behulp van het Gram-Schmidt proces.
- (c) Bepaal de kleinste kwadraten oplossing voor de vergelijking $[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2] \mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- (d) Bepaal de orthogonale (=loodrechte) projectie van $\mathbf{b}$ op V .

3. Zij

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zonder dat na te rekenen mag gebruikt worden dat $A^2 = -A$.

- (a) Toon aan dat $\text{rang } A = 2$ en bepaal een basis voor de nulruimte $\text{Nul } A$ van A .
- (b) Toon aan dat voor iedere vector $\mathbf{b} \in \text{Col } A$ geldt dat $A\mathbf{b} = -\mathbf{b}$.
- (c) Bepaal een basis van $\mathbb{R}^4$ die bestaat uit eigenvectoren van A .
(Hint: gebruik de beide vorige onderdelen.)
- (d) Bepaal een inverteerbare matrix P en een diagonaalmatrix D zó dat $A = PDP^{-1}$.

Z.O.Z.

4. (a) Zij $A = \begin{bmatrix} -10 & 18 \\ -6 & 11 \end{bmatrix}$. Toon aan dat -1 en 2 de eigenwaarden van A zijn.

(b) Los op:

$$\begin{cases} x_1'(t) &= -10x_1(t) + 18x_2(t), \\ x_2'(t) &= -6x_1(t) + 11x_2(t), \\ x_1(0) &= 5, \\ x_2(0) &= 3. \end{cases}$$

5. Bepaal of de onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld. Met A en B worden steeds matrices met reële elementen aangeduid.

- (a) Zij A een $m \times n$ matrix met $m < n$. Dan is er een vector $\mathbf{x} \neq 0$ met $A^T A \mathbf{x} = 0$.
 (b) Zij $\mathbb{P}_2$ de vectorruimte bestaande uit de polynomen van de graad ten hoogste 2 én het nulpolynoom. Als $\{p_1, p_2, p_3\} \subset \mathbb{P}_2$ zó is dat p_2 geen veelvoud is van p_1 , p_3 geen veelvoud is van p_2 , en ook is p_1 geen veelvoud van p_3 , dan is $\{p_1, p_2, p_3\}$ een onafhankelijk stelsel.
 (c) Voor iedere $n \times n$ matrix A geldt $\det(AA^T) \geq 0$.
 (d) De kolommen van een $m \times n$ matrix A vormen een basis voor de kolomruimte van A .
 (e) Als λ een eigenwaarde is van $A^T A$ en $\mathbf{x}$ is de bijbehorende eigenvector, dan is $\|A\mathbf{x}\|^2 = \lambda \|\mathbf{x}\|^2$.
 (f) Als $\text{Span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\} = \text{Nul } A$, de nulruimte van A , dan is $A\mathbf{b}_1 = A\mathbf{b}_2 = A\mathbf{b}_3 = 0$.

6. De deelruimte V van $\mathbb{R}^3$ wordt gegeven als $V = \text{Span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ waarbij

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Toon aan dat $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ een basis is voor V .
 (b) Van de vector $\mathbf{x}$ is gegeven dat de coördinaatvector $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ van $\mathbf{x}$ is $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [1 \ 2]^T$. Bepaal $\mathbf{x}$.
 (c) De lineaire transformatie $T: V \rightarrow V$ wordt gegeven door

$$T(\mathbf{b}_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{b}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ga na dat inderdaad $T(\mathbf{b}_1) \in V$ en $T(\mathbf{b}_2) \in V$. Bepaal de matrix $[T]_{\mathcal{B}}$ van T ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$.