

Normering:

$1a : 2;$ $2a : 1;$ $3a : 3;$ $4a : 2;$ $5a : 2;$ $6 : 9;$ $7a : 3;$
 $b : 2;$ $b : 1;$ $b : 3;$ $b : 2;$ $b : 2;$
 $c : 1;$ $c : 2;$
 $d : 1.$

Eindcijfer = $1 + \frac{\text{totaal}}{4}$.

Een uitwerking van het tentamen staat op 27 maart op www.math.vu.nl/~freek

1. De matrices A en B en de vector $\mathbf{b}$ zijn gegeven door

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 11 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

- (a) Bepaal alle oplossingen van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
(b) Bepaal alle oplossingen van $AB^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{b}$.
(c) Bepaal de oplossingsverzameling van de vergelijking $AB^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{0}$.
(d) Heeft $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ een oplossing voor iedere $\mathbf{c}$?
2. Zij $D : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de rotatie van $\mathbb{R}^3$ om de x_3 -as over $\frac{\pi}{2}$ radialen. (Dat wil zeggen, als je uit de positieve x_3 -as kijkt op het x_1x_2 -vlak, draaien van de positieve x_1 -as naar de positieve x_2 -as.)
Zij $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de projectie op het x_1x_3 -vlak in de richting van de x_2 -as.
Zij $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de lineaire transformatie die je krijgt door eerst D en daarna P toe te passen.
- (a) Bepaal de standaardmatrix A_D van de lineaire transformatie D .
(b) Bepaal de standaardmatrix A_P van de lineaire transformatie P .
(c) Bepaal de standaardmatrix A_T van de lineaire transformatie T en geef ook de formule van A_T uitgedrukt in A_D en A_P .
3. Zij $B = E_1 A E_2$, waarbij de matrices A , E_1 en E_2 worden gegeven door

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Bereken A^{-1} .
(b) Bereken B^{-1} .

Z.O.Z.

4. (a) Zij A een inverteerbare 4×4 matrix en $B = A^{-1}$. Geef de uitdrukking voor B in termen van de determinant van A en de cofactoren van de elementen van A .
- (b) Zij nu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Toon aan dat $b_{32} = 0$. (Hier is b_{32} het element van rij 3 en kolom 2 in $B = A^{-1}$.)

5. Zij

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+t & 1 \\ 1 & 1 & t-1 \\ 1 & 1+2t & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

- (a) Bewijs dat $\det A = t - t^2$.
- (b) Bepaal voor iedere waarde van t hoeveel oplossingen de vergelijking $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ heeft.
6. Bepaal of de onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld. Met A en B worden steeds matrices met reële elementen aangeduid.
- (a) Iedere $n \times n$ matrix is een product van elementaire matrices.
- (b) A en B zijn 4×4 matrices. Dan is rij 3 van AB een lineaire combinatie van de rijen van A .
- (c) Als een stelsel vectoren $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ in de vectorruimte $\mathbb{R}^n$ lineair afhankelijk is en $\mathbf{v}_k \neq 0$, dan is er een $j < k$ zo dat $\mathbf{v}_j$ een lineaire combinatie is van $\mathbf{v}_{j+1}, \dots, \mathbf{v}_k$.
- (d) Zij A een 2×3 matrix en zij $AB = I_2$, de twee bij twee eenheidsmatrix. Dan is B de inverse van A .
- (e) Als A een $m \times n$ matrix en $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ is een lineair onafhankelijk stelsel in $\mathbb{R}^n$, dan is ook het stelsel $\{A\mathbf{v}_1, \dots, A\mathbf{v}_k\}$ lineair onafhankelijk.
- (f) Bij ieder tweetal 3×3 matrices A en B zijn er rijen $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ en kolommen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ zo dat $AB = \mathbf{v}_1\mathbf{w}_1 + \mathbf{v}_2\mathbf{w}_2 + \mathbf{v}_3\mathbf{w}_3$.

7. Zij V de vectortuimte die bestaat uit alle functies $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ van de vorm

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^6 a_k \cos(k\pi t) + b_k \sin(k\pi t), \quad (a_0, \dots, a_6, b_1, \dots, b_6 \in \mathbb{R}).$$

Zij $W = \{f \in V : f(0) = f(\pi) = 0\}$, de verzameling van alle functies uit V die in 0 en π tegelijk nul zijn. Toon aan dat W een lineaire deelruimte van V is.