



Normering:

1a : 1; 2a : 2; 3a : 5; 4a : 2; 5 : 4;
b : 3; b : 3; b : 4; b : 8;
c : 2; c : 2;

Eindcijfer = $1 + \frac{\text{totaal}}{4}$.

1. De matrices L en U en de vector b zijn gegeven door

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Zij verder $A = LU$ (A hoeft niet te worden berekend).

- (a) Toon aan dat de vector x een oplossing is van $Ax = b$.
- (b) Los op: $Ax = 0$.
- (c) Bepaal alle oplossingen van $Ax = b$.

2. De matrices A , B en C zijn gegeven door

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Toon aan $C^4 = 0$.
- (b) Zij E een $n \times n$ matrix met $E^4 = 0$ en $D = I + E + E^2 + E^3$. Toon aan dat $D^{-1} = I - E$. Bepaal hiermee B^{-1} .
- (c) Zij Y een $n \times n$ matrix. Bereken de inverse van de $2n \times 2n$ gepartitioneerde matrix (=blokmatrix) $\begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix}$. Bepaal hiermee A^{-1} .

Z.O.Z.

3. (a) Zij $t \in \mathbb{R}$ en $A(t)$ de matrix gegeven door

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & t \\ 1 & t & t^2 \end{bmatrix} \quad \text{en } b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- i. Toon aan dat de determinant van $A(t)$ gelijk is aan $t^3 - 2t^2 + t$.
 - ii. Voor welke waarden van t is $A(t)$ inverteerbaar?
 - iii. Ga na of de vergelijking $A(t)x = b$ consistent is voor $t = 0$.
- (b) Geef de definitie van surjectiviteit van een functie. Voor welke t is de afbeelding $T(t) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, gedefinieerd door $T(t)(x) = A(t)x$ met

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

surjectief?

4. (a) Geef de definitie van lineaire onafhankelijkheid van een verzameling vectoren $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$.
- (b) Bepaal of de onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.
- i. Voor iedere $m \times n$ matrix A geldt: als de rijen van A lineair onafhankelijk zijn, dan ook de kolommen.
 - ii. Voor iedere $m \times n$ matrix A geldt: als de rijen van A lineair afhankelijk zijn, dan ook de kolommen.
 - iii. Als de matrices A en B inverteerbaar zijn en $AB = BA$, dan is $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.
 - iv. Als voor twee matrices A en B geldt: $A^T AB = 0$ en $A \neq 0$ dan is ook $B = 0$.
 - v. Zij A een inverteerbare $n \times n$ matrix en zij $\{v_1, \dots, v_n\}$ een lineair onafhankelijke verzameling vectoren in $\mathbb{R}^n$. Dan is $\{Av_1, \dots, Av_n\}$ ook lineair onafhankelijk.

5. Zij

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bepaal de inverse van A . Wat zijn de cofactoren van A ?